த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண்—577

பயன்முறை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(பொறியியல் பட்டப்படிப்பிற்குரியது)

ஆசிரியர்
டாக்டர் எம். கே. வெங்கட்டராமன்,
எம்.ஏ., எம்.டெக்., பி.எச்டி.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
அழகப்பச் செட்டியார் பொறியியல் தொழில்நுட்பக் கல்லூரி,
காரைக்குடி.



தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—June, 1974

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 57

APPLIED DIFFERENTIAL EQUATIONS

Dr. M. K. Venkataraman

Price Rs 6-65

Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of books and literature in regional languages at the University level, of the Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare (Department of Culture), New Delhi.

Printed by
Kumaran Press,
298, Mint Street,
Madras-600001.

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வித்துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினுன் காண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்றுவந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் அறிவியல் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், புவியமைப்பியல், மனையியல், கணிதம், இயற்பியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், விலங்கியல், தாவரவியல், பொறியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழிபெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றுன 'பயன்முறை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்' என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 577 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க்குழுவின் சார்பில் வெளியான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 612 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன. இந் நூல் மைய அரசு கல்வி, சமூக நல அமைச்சகத்தின் மாநில மொழியில் பல்கலைக்கழக நூல்கள் வெளியிடும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்படுகிறது.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும். அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பல்வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரியதாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

1. தோற்றுவாய்

(Introduction)

§ 1. வரையறைகள்

வகைக்கெழுக்கள் அல்லது வகையீடுகள் அடங்கிய சமன்பாடுகளே வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் எனப்படும். வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் இருவகைப்படும் :

(1) சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Ordinary differential equations).

(2) பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Partial differential equations).

சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளில் ஒரே ஒரு சார்பில் மாறியும் அந்த மாறியைப் பொறுத்த வகைக்கெழுக்களும் இடம் பெறும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$dy = \cos x \, dx \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (i)$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} + 6y = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (ii)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt} + 5x + y &= e^t \\ \frac{dy}{dt} + 3y - x &= e^{2t} \end{aligned}\right\} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (iii)$$

மேற்கண்டவை எல்லாம் சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள். (iii)-ல் x, y என்ற இரு சார்புடைய மாறிகளும், t என்ற ஒரே ஒரு சார்பில் மாறியும் இருக்கின்றன.

பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சார்பில் மாறிகளும் அவைகளைப் பொறுத்த வகைக்கெழுக்களும் இடம்பெறும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(iv)}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{(v)}$$

இவைகள் எல்லாம் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் அமைந்திருக்கும் வகைக் கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையே, அந்தச் சமன்பாட்டின் வரிசை (order) எனப்படும். ஆகவே, மேற்கண்டவற்றில்

(i) சமன்பாட்டின் வரிசை ஒன்று.

(ii) சமன்பாட்டின் வரிசை இரண்டு.

(iv)-ம், (v)-ம் முறையே முதல், இரண்டாம் வரிசைப் பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் அமைந்திருக்கும் வகைக் கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையின் படியே, அச் சமன்பாட்டின் படி (degree) எனப்படும்.

$\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^3 + 5\frac{dy}{dx} + 8y = 0$ என்ற சாதாரணச் சமன்பாட்டின் வரிசை இரண்டு, படி மூன்று.

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் படியைத் தீர்மானம் செய்வதற்கு முன்பு, அந்தச் சமன்பாட்டிலுள்ள வகைக்கெழுக்களுடன் சம்பந்தப்பட்ட மூலங்களையும் பின்னங்களையும் நீக்கிக் கொள்ள வேண்டும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)} = r$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில், இரு பக்கங்களையும் வர்க்கப் படுத்தி, குறுக்கே பெருக்கினுல் கிடைக்கும் சமன்பாடு

$$r^2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)^2 = \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$$

ஆக்வே, இந்தச் சமன்பாட்டின் வரிசை 2, படி 2 என்று தெரிகிறது.

§ 2. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் ஏற்படக் காரணம்

விஞ்ஞானம், பொறியியல் பற்றிய பல பகுதிகளில் வகைக்கெழுக்கள் இடம்பெறுகின்றன. வகைக்கெழுவால் மாறிகளின் மாறுவீதத்தினை அளக்கலாமென்று நமக்குத் தெரியும். ஆகவே, மாறுவீதம் சம்பந்தப்பட்ட பல விதிகளை எடுத்துரைக்க வகைக்கெழுச் சமன்பாடு முக்கியமாகப் பயன்படுகிறது. அம்மாதிரிப் பயன்முறை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (applied differential equations) பிற்பட்டுக் கவனிக்கப்படும்.

§ 3. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள்

சார்புடைய மாறி, சார்பில் மாறி இவைகளை மட்டும் கொண்டதாயும் அவைகளுடைய வகைக்கெழுக்கள் இல்லாததாயும் உள்ள ஏதாவது ஒரு தொடர்பு, ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுக்குப் பொருத்தமாக அமைந்தால், மேற்கண்ட தொடர்பு அந்த வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு (solution) அல்லது தொகை (integral) எனப்படும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \qquad (1)$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுக்கு,

$$y = \sin x \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \qquad (2)$$

என்பது ஒரு தீர்வு.

மேலும், $y = \sin x + c \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \qquad (3)$

என்ற சார்பும் (1)-க்குப் பொருத்தமாக இருக்கிறது. (3)-ல் c ஏதேனும் ஒரு மாறிலி (arbitrary constant). ஆகவே, (3) ஐ வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (1)-ன் பொதுத்தீர்வு (general solution) என்பர். c-க்கு வெவ்வேறு மதிப்புகள் கொடுத்தால், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுக்குப் பல தீர்வுகள் கிடைக்கின்றன. அவைகள் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வுகள் (particular solutions) எனப்படும்.

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு, சமன்பாட்டின் மூலம் (primitive) என்றும் சொல்லப்படும்.

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வில் அமையும் மாறிலிகளின் எண்ணிக்கையும் அச்சமன்பாட்டின் வரிசையும் ஒன்றாக

இருந்தால், மேற்படி தீர்வு, அந்தச் சமன்பாட்டின் மிகப் பொதுத் தீர்வு (most general solution) எனப்படும். ஆகவே, முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் மிகப் பொதுத் தீர்வில் ஒரு மாறிலி அடங்கியிருக்கும். இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் மிகப் பொதுத்தீர்வில் இரண்டு மாறிலிகள் அடங்கியிருக்கும். இம் மாதிரியே n-வரிசையுள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் மிகப் பொதுத்தீர்வில் n மாறிலிகள் இடம் பெறும்.

§ 4. வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் அமைப்பது

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்விலிருந்து அந்தச் சமன்பாடு எவ்விதம் ஏற்படுகின்றது என்பதை முதலில் ஆராய்வோம்.

$$y = A\cos nx + B\sin nx \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்று கொள்வோம். இதில் A, B என்பவை இரு பொது மாறிலிகள். (1)ஐப் பொதுத்தீர்வாகக் கொண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிப்போம். (1)-லிருந்து, x ஐப் பொறுத்த வகைக்கெழு இரு முறை காணின்,

$$\frac{dy}{dx} = -An\sin nx + Bn\cos nx \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -An^2\cos nx - Bn^2\sin nx$$

$$= -n^2(A\cos nx + B\sin nx) \quad \dots \quad (3)$$

(1), (2), (3) இவைகளிலிருந்து, A, B இவற்றை நீக்குவோம். (1)ஐ (3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -n^2y$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

(4) நமக்கு வேண்டிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

ஆகவே, பொது மாறிலிகளடங்கிய கொடுத்துள்ள ஒரு சார்பிலிருந்து தகுந்த வகைக்கெழுச் சமன்பாடு கிடைப்பதற்கு, அந்தச் சார்பை, நமக்கு வேண்டிய தடவைகள் வகையிட்டு, பின்பு அந்த மாறிலிகளை நீக்க வேண்டும். இம் முறை பின்கண்ட எடுத்துக் காட்டுகளிலிருந்து நன்கு விளங்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$y = 1 + x^2 + c(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ என்ற சார்பிலிருந்து, மாறிலி c ஐ நீக்கி வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(B. E. '70; 71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள சார்பு $y = 1 + x^2 + c(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ ... (1)

(1) ஐ, x ஐப் பொறுத்து வகையிட்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = 2x + c \cdot \frac{1}{2\sqrt{1 + x^2}} \cdot 2x = x + \frac{cx}{\sqrt{1 + x^2}} \quad \cdots \quad (2)$$

(1)-ம், (2)-ம் கொண்டு, c என்ற மாறிலியை நீக்குவோம்.

(1)-லிருந்து, $c = \dfrac{y - 1 - x^2}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}}$ ... ... (3)

(3)ஐ, (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{(y - 1 - x^2)\,x}{(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= x + \frac{(y - 1 - x^2)x}{1 + x^2}$$

$$= x + \frac{yx}{1 + x^2} - \frac{(1 + x^2)\,x}{1 + x^2} = \frac{yx}{1 + x^2}$$

$$\therefore \quad (1 + x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

இதுவே நாம் வேண்டும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும். இதை $(1 + x^2)\,y' - xy = 0$ என்றும் எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$xy = ae^{2x} + be^{-2x}$ என்ற சார்புக்குத் தகுந்த வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(B.E. '73, ம. ப. க.)

கொடுத்துள்ள சார்பு $xy = ae^{2x} + be^{-2x}$ ... ... (1)

இந்தச் சார்பில் இரண்டு மாறிலிகள் a, b-ம் இருப்பதால், இது இரண்டாம் வரிசையுள்ள ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுக்குத்

தீர்வாக அமையும். ஆகவே (1)ஐ நாம் இரண்டு முறை வகையிட வேண்டும்.

(1)ஐ இருபக்கமும் xஐப் பொறுத்து வகைக்கெழு காணின், கிடைப்பது,

$$x\frac{dy}{dx} + y = 2ae^{2x} - 2be^{-2x} \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

மீண்டும் (2)ஐ வகையிட்டால்,

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 4ae^{2x} + 4be^{-2x}$$

$$= 4(ae^{2x} + be^{-2x})$$

$$= 4xy \quad \text{[(1)ஐப் பயன்படுத்தி]}$$

$$\therefore \quad x\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 4xy = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

மேற்கண்ட செய்முறையிலேயே மாறிலிகள் a, b நீக்கப்பட்டுள்ளன. ஆகவே, (3) நமக்கு வேண்டிய சமன்பாடாகும்.

இதை $xy'' + 2y' - 4xy = 0$ என்றும் எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

a, b இரு மாறிலிகளெனின் $y = a \sec x + b \tan x$ என்ற சார்பைத் தீர்வாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(B. E. '70. மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்;
B. E. '70, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

$$y = a \sec x + b \tan x \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = a \sec x \tan x + b \sec^2 x$$

$$= \sec x\,(a \tan x + b \sec x) \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec x\,(a \sec^2 x + b \sec x \tan x) + (a \tan x + b \sec x) \sec x \tan x$$

$$= \sec^2 x\,(a \sec x + b \tan x) + \sec x\,(a \tan x + b \sec x) \tan x \dots \quad (3)$$

(1), (2), (3) இவற்றிலிருந்து a, b மாறிலிகளை நீக்குவோம்.

(1) ஐயும் (2) ஐயும் (3)-ல் பிரதியிட்டால், கிடைப்பது

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sec^2 x \cdot y + \frac{dy}{dx} \cdot \tan x$$

அதாவது,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \tan x \frac{dy}{dx} - y\sec^2 x = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(4) நமக்கு வேண்டிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

பயிற்சிகள் 1

1. கீழ்க்காணும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் வரிசை, படி முதலியவற்றை எழுதவும் :

(a) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = \cos x$

(b) $y'' - \frac{x}{y''} = 1$

(c) $y''' + (y'')^2 = 4$

(d) $L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$ (L, R, C மாறிலிகள்)

2. கீழ்க்கண்ட சார்புகளில் மாறிலிகளை நீக்கி, உரிய வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளைக் காண்க :

(a) $y = ax + bx^2$

(b) $y = ae^{2x} + be^{-3x}$

(c) $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ (B.E. '62, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

(d) $y = c_1e^{2x} + c_1e^{-3x} + c_3e^x$

(e) $y = c_1e^x + c_2\cos x$
(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

(f) $y = c_1e^{-x} + c_2\sin x$
(B. E. '72, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

(g) $y(x) = \cos mx\,(A\cosh mx + B\sinh mx)$
(B. E. '72, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

[x-ன் சார்பாக y இருக்கிறதென்பதை $y(x)$ என்ற குறியீடு காட்டுகிறது].

3. $y = ax + a - a^3$ என்பதிலிருந்து a ஐ நீக்கவும்.

4. $pv^\gamma = c$ என்ற வெப்பம் மாற்றீடற்ற விதியிலிருந்து (adiabatic law) c ஐ நீக்கி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்க.

5. $y = a\cos(nx + b)$ ஐப் பொதுத் தீர்வாகக் கொண்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. (a. b மாறிலிகள்)

(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

6. $ay^2 = (x - c)^3$ என்ற சார்பைப் பொதுத் தீர்வாகக் கொண்ட இரண்டாம் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க. (a, c மாறிலிகள்)

(B. E. '52, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. உருளை வலிமைக் கொள்கையில். (Theory of the strength of cylinders). $u = Ar + \frac{B}{r}$ (A, B இரு மாறிலிகள்) என்ற சூத்திரம் இடம்பெறுகிறது u-க்குப் பொருத்தமாயுள்ள வகைக் கெழுச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

8. சாமானிய இசையியக்கத்தின் சமன்பாடு (equation of simple harmonic motion). $x = a\sin(\omega t + \phi)$ என்பதாகும். இதில் வீச்சு (amplitude) a, கட்டக் கோணம் (phase angle) ϕ இவைகளை நீக்கி, வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்க.

9. தடைப்பட்ட இசையியக்கத்தின் (resisted harmonic motion) சமன்பாடு $x = Ae^{-\alpha t}\sin(\omega t + \phi)$ என்பதாகும். இதில் A, ϕ இவைகளை நீக்கி, வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்க.

10. $y = A\cos ax + B\sin ax + C\cosh ax + D\sinh ax$ என்ற சார்பில் A, B, C, D பொது மாறிலிகள் இந்தச் சார்புக்கு உகந்த வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

§5. வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வடிவந்தன்மை விளக்கம் (Geometrical interpretation of a differential equation)

$x^2 + y^2 = a^2$ ... (1) என்பது ஆதியை மையமாகவும் a ஆரம் ஆகவும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

$a = 1, 2, 3$ ... என்ற வெவ்வேறு மதிப்புகள் கொள்ளும் போது, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, ... போன்று ஒரு வட்டக் குடும்பம் ஏற்படுகிறது. இவைகளெல்லாம் ஆதியை

மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டக் குடும்பம். இந்தக் குடும்பத்திற்குப் பொதுவாக உள்ள $x^2+y^2=a^2$ ... (1) என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து அக் குடும்பத்தின் வடிவத் தன்மை புலப்படுவதில்லை.

இப்போது (1)-லிருந்து a மாறிலியை நீக்குவோம்.

(1) ஐ இருபக்கமும் x ஐப் பொறுத்து வகையிட்டால்,

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

(அ-து) $x + y\dfrac{dy}{dx} = 0$ ... ... (2)

(1)-க்கு உரிய வகைக் கெழுச் சமன்பாடு (2)

(2)-லிருந்து $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$ ... ... (3)

(3) ஐக் கொண்டு, கொடுத்துள்ள வட்டக் குடும்பத்தின் வடிவத் தன்மையை அறியலாம். அதிலிருந்து நாம் அறிவது யாதெனில்,

இக் குடும்பத்திலுள்ள எந்த வட்டத்துக்கும் (x, y) என்ற இடத்தில் வரையப்படுகிற தொடுகோட்டின் சாய்வு $= -\dfrac{x}{y}$

(அ-து) சாய்வு $= -\dfrac{\text{அப் புள்ளியின் } x \text{ ஆயத்தொலை}}{\text{அப் புள்ளியின் } y \text{ ஆயத்தொலை}}$

மேலும், (x, y) என்ற புள்ளியில் அமையும் தொடுகோடும், அப் புள்ளியை மையத்தோடு சேர்க்கும் ஆரைக்கோடும் (radius) ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன என்றும் அறிகிறோம். ஏனெனில், அப் புள்ளியின் வழியாகச் செல்லும் ஆரையின் சாய்வு

$$= \frac{y}{x}.$$

∴ (ஆரையின் சாய்வு) × (தொடுகோட்டின் சாய்வு)

$$= \frac{y}{x} \times -\frac{x}{y} = -1$$

ஆகவே, ஒரு வளைவரைக் குடும்பத்தின் வடிவத் தன்மையை அதனுடைய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிலிருந்து அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

ஒரு வட்டக் குடும்பம், ஆரம் r ஆகவுடையது. அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு யாது ?

கொடுத்துள்ள வட்டக் குடும்பத்தைச் சேர்ந்த, ஏதேனுமொரு வட்டத்தின் மையம் (a, b) என்ற புள்ளியாகக் கொள்வோம்.

∴ அந்த வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இதில் a, b இரு மாறிலிகள்.

(1) ஐ இரு பக்கமும் x ஐப் பொறுத்து வகையிட்டால்,

$$2(x-a)+2(y-b)\frac{dy}{dx}=0$$

$$(\text{அ-து}) \quad (x-a)+(y-b)\frac{dy}{dx}=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2) ஐ வகையிட்டால்,

$$1+(y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$(\text{அ-து}) \quad (y-b)\frac{d^2y}{dx^2}+1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0 \quad \ldots \quad (3)$$

(1), (2), (3) இவற்றிலிருந்து a, b-க்களை நீக்குவோம்.

$$(3)\text{-லிருந்து}, \quad y-b=-\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)} \quad \ldots \quad (4)$$

$$(2)\text{-லிருந்து}, \quad x-a=-(y-b)\frac{dy}{dx} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

முதலில் (5) ஐ (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$(y-b)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(y-b)^2=r^2$$

$$(\text{அ-து}) \quad (y-b)^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=r^2 \quad \ldots \quad (6)$$

(6)-ல் (4) ஐப் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=r^2$$

(அ - து) $r^2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$ ... (7)

(7) நமக்கு வேண்டிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு பரவளைவுக் (parabola) குடும்பத்தின் அச்சுகள் x அச்சில் அமைந்திருக்கின்றன. அவைகளின் குவியம் (focus) ஆதியாக உள்ளது. அக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு யாது? (B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள பரவளைவுக் குடும்பத்தைச் சேர்ந்த ஏதேனுமொன்றின் குவிய மாறிலி (latus rectum) $4a$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ அதனுடைய சமன்பாடு $y^2=4a(x-a)$ ... (1)

இதில் a ஒரு மாறிலி.

(1) ஐ இரு பக்கமும் x ஐப் பொறுத்து வகையிட்டால்,

$$2y\frac{dy}{dx}=4a$$

அதாவது $y\frac{dy}{dx}=2a$ ... ... (2)

(1), (2) இவற்றிலிருந்து, a ஐ நீக்குவோம்.

(2)-லிருந்து $a=\frac{1}{2}y\frac{dy}{dx}$.

(a)-ன் இந்த மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$y^2=2y\frac{dy}{dx}\left(x-\frac{1}{2}y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$=2xy\frac{dy}{dx}-y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(3) நமக்கு வேண்டிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

பயிற்சிகள் 2

1. ஒரு நேர்கோட்டுக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச்சமன் பாடு $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$ என்று நிரூபி. இந்தச் சமன்பாடு விளக்கும் வடிவத் தன்மை யாது ?

2. ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு நேர்கோட்டுக்கு $\frac{y}{x} = \frac{dy}{dx}$ என்று நிரூபி. இந்தச் சமன்பாடு விளக்கும் வடிவத் தன்மை யாது ?

3. ஒரு வட்டக் குடும்பம், அச்சுகளைத் தொடுகோடுகளாகக் கொண்டுள்ளது. அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு யாது ?

4. ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு வட்டக் குடும்பத்தின் மையப் புள்ளிகள் x-அச்சில் அமைந்துள்ளன. அதன் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு யாது ?

5. $x^2 - y^2 - 2ay = 0$ என்ற சமன்பாடுள்ள ஒரு வட்டக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $(x^2 - y^2)\frac{dy}{dx} = 2xy$ என்று காட்டு. (B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

6. பொதுவச்சுள்ள (coaxal) ஒரு வட்டக்குடும்பத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$ என்பதாகும். இதில் a மாறிலி. c மாருத மாறிலி. அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு யாது ?

7. ஒரு பரவளைவுக் குடும்பத்தின் அச்சுகள், x-அச்சோடு, ஒரு போகுக்கோடுகள் (parallal lines). அவைகளின் குவிய மாறிலி $4a$. அக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு யாது ?

8. ஒரு பரவளைவுக் குடும்பத்தின் அச்சுகள், x-அச்சோடு, இணைந்திருக்கின்றன. அதன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$$y\frac{d^2 y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$ என்று காட்டு.

9. $r = a(1 + \cos\theta$ என்ற நெஞ்சுவளைக் (cardioid) குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

10. $r = c e^{\theta}$ என்ற சுருளிக் (spiral) குடும்பத்தின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு யாது ?

11. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு யாது ?

2. முதல் வரிசை, முதற்படிச் சமன்பாடுகள்

(Equations of the First Order and of the First Degree)

§ 6. முன் அத்தியாயத்தில் x, y, மாறிலிகளடங்கிய ஒரு சார்பிலிருந்து x, y, x-ஐப் பொறுத்த y-ன் வகைக்கெழுக்களடங்கிய ஒரு தொடர்பு கிடைக்கும் முறை காட்டப்பட்டது. அதாவது, x, y என்பவற்றின் தொடர்பிலிருந்து, வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காணும் முறை விளக்கப்பட்டது. இப்போது இதனுடைய நேர்மாறான முறையைக் கவனிப்போம். அதாவது, கொடுத்துள்ள ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிலிருந்து அதிலடங்கிய மாறு ராசிகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண வேண்டும்.

கொடுத்துள்ள மூலங்களுக்குகந்த இயற்கணிதச் சமன்பாட்டை அமைப்பது எளிது. ஆனால் இதற்கு நேர்மாறாக, எல்லாவித இயற்கணிதச் சமன்பாடுகளின் தீர்வைக் காண்பது அதைவிடக் கடினம். எத்தகைய சிக்கலான சார்பு இருந்தாலும் அதன் வகைக்கெழுவைக் காண முடியும். ஆனால் இதற்கு நேர்மாறாக, எல்லா விதச் சார்புகளுக்கும் கணிதத்திற்குரிய அமைப்பில் தொகை காண முடியாது. இவ்வாறே கொடுத்துள்ள தீர்விலிருந்து அதற்குகந்த வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்கமுடியும். ஆனால், இதற்கு நேர்மாறாக எல்லாவித வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வு காணுவது இயலாது.

எனினும், சில குறிப்பிட்ட அமைப்புடைய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காணலாம். அம்மாதிரி குறிப்பிட்ட அமைப்புடைய முதல் வரிசை, முதற்படிச் சமன்பாடுகளை ஆராய்வோம்.

§ 7. அமைப்பு I மாறுராசிகள் பிரிக்கப்படக்கூடியவை (Variables Separable)

கொடுத்துள்ள ஒரு சமன்பாட்டை

$$f(x)\,dx + F(y)\,dy = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற முறையில் அமைத்து எழுத முடியுமெனக் கொள்வோம். இதில் ஓர் உறுப்பு x, dx இவைகளையும் மற்றொன்று y, dy இவைகளையும் அடக்கியிருக்கின்றன. அதாவது, மாறுராசிகள் x, y பிரிக்கப்படக்கூடியவை.

மேற்கண்ட சமன்பாட்டை நேரடியாகத் தொகையிடலாம்.

அப்போது நமக்குக் கிடைப்பது

$$\int f(x)\,dx + \int F(y)\,dy = C \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்ற தீர்வு. இதில் C ஏதேனுமொரு மாறிலி.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$y'(x) = \frac{y^2 - 2y + 5}{x^2 - 2x + 2}$$ (B. E. '72, சென்னைப் பல்கலைக் கழகம்)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 2y + 5}{x^2 - 2x + 2}$$

பிரித்தெழுதினால், $$\frac{dy}{y^2 - 2y + 5} = \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$$

அதாவது, $$\frac{dy}{(y-1)^2 + 2^2} = \frac{dx}{(x-1)^2 + 1^2}$$

$$\therefore \int \frac{dy}{(y-1)^2 + 2^2} = \int \frac{dx}{(x-1)^2 + 1^2} + c$$

(அ - து) $$\int \frac{d(y-1)}{(y-1)^2 + 2^2} = \int \frac{d(x-1)}{(x-1)^2 + 1^2} + c$$

$$\therefore \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{y-1}{2}\right) = \tan^{-1}(x-1) + c$$ என்பது

தீர்வு.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க : $ydx - xdy + 3x^2 y^2 e^{x^3} dx = 0$

(B. E. '63, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + 3x^2 e^{x^3} dx = 0$$

அதாவது, $$d\left(\frac{x}{y}\right) + 3x^2 e^{x^3} dx = 0$$

$$\therefore \int d\left(\frac{x}{y}\right) + \int 3x^2 e^{x^3} dx = c$$

(அ-து) $$\frac{x}{y} + \int e^{x^3} d(x^3) = c$$

அல்லது $\dfrac{x}{y} + e^{x^3} = c$ என்பது தீர்வு.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்வு காண்க :

$$\sec^2 x \tan y\, dx + \sec^2 y \tan x\, dy = 0.$$

இரு பக்கங்களையும் $\tan x \tan y$ ஆல் வகுத்தால்,

$$\frac{\sec^2 x}{\tan x} dx + \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = 0$$

$$\therefore \int \frac{\sec^2 x}{\tan x} dx + \int \frac{\sec^2 y}{\tan y} dy = c'$$

அதாவது, $$\int \frac{d(\tan x)}{\tan x} + \int \frac{d(\tan y)}{\tan y} = c'$$

$$\therefore \log \tan x + \log \tan y = c' \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்பது தீர்வு.

முக்கியக் குறிப்பு : மேற்கண்டதில் c' என்பது ஒரு பொது மாறிலி. ஆகவே, $c' = \log c$ என்று கொள்ளலாம். (c என்பது மற்றொரு மாறிலி)

இப்போது $\log \tan x + \log \tan y = \log c$ என்பது தீர்வு.

அதாவது $$\log(\tan x \tan y) = \log c$$

அல்லது $$\tan x \tan y = c \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்பது தீர்வாகும். தீர்வின் (2) ஆவது அமைப்பு, (1) ஐக் காட்டிலும் நேர்த்தியாகவும் சுருக்கமாகவுமுள்ளது. ஆகவே, ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வை சுருக்கமான வடிவத்தில் எழுதுவதற்கு, தீர்வில் நாம் சேர்க்கும் மாறிலியின் அமைப்பைத் தக்கபடி எடுத்துக்கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

$x = 0$ என்றபோது, $y = 0$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு $\frac{dy}{dx} = e^{3x+y}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வைக் காணவும்.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை

$dy = e^{3x} \cdot e^{y}\, dx$ என்று எழுதலாம்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{e^y} = e^{3x}\, dx$$

$$\int e^{-y}\, dy = \int e^{3x}\, dx + c$$

அதாவது, $-e^{-y} = \frac{e^{3x}}{3} + c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

இது சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வு.

$x = 0$, $y = 0$ என்ற நிபந்தனை கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது.

$\therefore$ (1)-ல் இந்த மதிப்புகளைப் பிரதியிட்டால், கிடைப்பது

$$-1 = \frac{1}{3} + c$$

$$\therefore \quad c = -\frac{4}{3}$$

c-ன் இந்த மதிப்பை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$-e^{-y} = \frac{e^{3x}}{3} - \frac{4}{3}$$

அல்லது, $e^{3x} + 3e^{-y} - 4 = 0$ என்பது சிறப்புத் தீர்வு.

பயிற்சிகள் 3

பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க.

1. $x\,dx + y\,dy = 0$

2. $x\,dy + y\,dx = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x+5}{y+3}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4(y+3)}{3(x-2)}$

5. $\cos\theta\,dr - r\sin\theta\,dr = 0$

6. $(1 - e^x)\sec^2 y\,dy + 3e^x \tan y\,dx = 0$
(B.E. '62, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம் ;
(B.E. '64, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. $(\sin x + \cos x)\,dy + (\cos x - \sin x)\,dx = 0$

8. $\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}} = 0$ (B.E. '61, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

9. $\sqrt{1+x^2}\,\dfrac{dy}{dx} + \sqrt{1+y^2} = 0$

10. $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2}\,\dfrac{dy}{dx} = 0$

11. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x(1+y^2)}{y(1+x^2)} = 0$

12. $\sin^{-1}x\,dy + \dfrac{y\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0$

13. $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2x\cot y$

14. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y^2+y+1}{x^2+x+1} = 0$ (B.E. '69, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

15. $x\dfrac{dy}{dx} + y = xy$. (B.E. '51, ஆந்திராப் பல்கலைக்கழகம்)

16. $\dfrac{dy}{dx} = 2xy + 2ax$. (B.E. '64, வெங்கடேஸ்வராப் பல்கலைக்கழகம்)

17. $(x^2 - yx^2)\dfrac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$

(B. E. '64, வெங்கடேஸ்வராப் பல்கலைக்கழகம்)

18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y(1 + x^2)}{x(1 + y^2)}$

19. $y - x\dfrac{dy}{dx} = a\left(y^2 + \dfrac{dy}{dx}\right)$

(B. E. '65, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

20. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x(2\log x + 1)}{\sin y + y\cos y}$

(B. E. '64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

21. $y^2 \cos\sqrt{x}\, dx - 2\sqrt{x} \cdot e^{\frac{1}{y}}\, dy = 0$

(B. E. '63, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

22. $xdy + ydx + 4\sqrt{1 - x^2y^2}\, dx = 0$

(B. E. '64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

23. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}$ (B. E. '60, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

24. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x-y} + x^3 e^{-y}$ (B. E. '64, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

25. $y\dfrac{dy}{dx} = e^{x+2y}\sin x$ (B. E. '64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

26. $\dfrac{dy}{dx} = e^{x+y}\cosh x$ (B. E. '69, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

§8. கொடுத்துள்ள ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு மாறுராசிகள் பிரிக்கப்படக் கூடிய வகையில் அமைந்திராவிட்டால், சிறிது மாற்றங்கள் மூலம், அதை அவ்வகைக்குக் கொண்டுவர இயலும். எடுத்துக்காட்டாக,

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டில்,

$$ax + by = u \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்று பிரதியிடுவோம். இந்த மாற்றத்தினல், u புதிய சார்புடைய மாறியாக ஆகிறது என்றும், x சார்பில் மாறியாகவே இருக்குமென்றும் கொள்ளவேண்டும்.

(2) லிருந்து,

$$a + b\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{du}{dx} - b\right)}{b} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(3) ஐ (1)-ல் பிரதியிட்டால், கிடைப்பது

$$\frac{\frac{du}{dx} - a}{b} = f(u)$$

அதாவது, $\frac{du}{dx} = a + bf(u) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

இது x, u இவற்றில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

$$\therefore \quad \frac{du}{a + bf(u)} = dx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

(5)-ல் u, x ராசிகள் பிரிக்கப்படுகின்றன.

$\therefore$ (5) ஐ தொகையிட்டால்,

$$\int \frac{du}{a + bf(u)} = \int dx + c = x + c \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

என்பது (1) உடைய தீர்வாகும்.

இது மாதிரியே,

$$yf(xy)\,dx + xF(xy)\,dy = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

என்ற சமன்பாட்டைத் தீர்க்க

$$xy = v \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$$

(8)-லிருந்து

$$x\frac{dy}{dx} + y = \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dv}{dx} - y}{x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$$

(7) ஐ பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$y f(xy) + x F(xy) \frac{dy}{dx} = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (10)$$

(8), (9) இவைகளை (10)-ல் பிரதியிட்டால் கிடைப்பது

$$y f(v) + x F(v) \cdot \frac{\left(\frac{dv}{dx} - y\right)}{x} = 0.$$

அதாவது $\frac{v}{x} f(v) + F(v)\left(\frac{dv}{dx} - \frac{v}{x}\right) = 0$

$$F(v) \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} F(v) - \frac{v}{x} f(v) = \frac{v[F(v) - f(v)]}{x}$$

$$\frac{F(v)}{v[F(v) - f(v)]} dv = \frac{dx}{x}$$

தொகையிட்டால்,

$$\int \frac{F(v)}{v[F(v) - f(v)]} dv = \int \frac{dx}{x} + c = \log x + c$$

என்பது தீர்வாகும். ... ... (11)

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வுகாண்க :

$$(x - y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$$ (B. E. '64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

இந்தச் சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$ என்ற வகையைச் சேர்ந்தது.

$x - y = u$ என்று பிரதியிடுக.

வகைக்கெழு காணின், $1 - \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$

$$i.e. - \frac{dv}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{du}{dx}$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு இப்போது,

$$u^2\left(1-\frac{du}{dx}\right)=a^2 \text{ என்று மாறும்.}$$

$$1-\frac{du}{dx}=\frac{a^2}{u^2}$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx}=1-\frac{a^2}{u^2}=\frac{u^2-a^2}{u^2}$$

$$i.e. \quad dx\,(u^2-a^2)=du\cdot u^2$$

$$\therefore \quad dx=\frac{u^2}{u^2-a^2}\,du$$

தொகை காண, $\int \frac{u^2}{u^2-a^2}\,du=x+c$

அதாவது, $\int \frac{u^2-a^2+a^2}{u^2-a^2}\,du=x+c$

$$\int\left(1+\frac{a^2}{u^2-a^2}\right)du=x+c$$

$$u+a^2\cdot\frac{1}{2a}\log\frac{u-a}{u+a}=x+c$$

$$x-y+\frac{a}{2}\log\frac{x-y-a}{x-y+a}=x+c$$

அல்லது, $\frac{a}{2}\log\frac{x-y-a}{x-y+a}-y=c$

என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :
தீர்வு காண்க :

$$(x^3y^3+x^2y^2+xy+1)\,y+(x^3y^3-x^2y^2-xy+1)\,x\frac{dy}{dx}=0.$$

இந்த சமன்பாடு $yf(xy)\,dx+x\,F(xy)\,dy=0$ என்ற வகையைச் சேர்ந்தது.

$xy=u$ என்று பிரதியிடுவோம்.

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} + y = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - y}{x} = \frac{\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}}{x}$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு இப்போது

$$(u^3 + u^2 + u + 1)\frac{u}{x} + (u^3 - u^2 - u + 1)\, x\, \frac{\left(\frac{du}{dx} - \frac{u}{x}\right)}{x} = 0$$

என்று மாறும்.

$$\therefore \quad (u^4 + u^3 + u^2 + u) + (u^3 - u^2 - u + 1)\left(x\frac{du}{dx} - u\right) = 0$$

$$x\frac{du}{dx} - u = -\frac{(u^4 + u^3 + u^2 + u)}{u^3 - u^2 - u + 1}$$

$$x\frac{du}{dx} = u - \frac{(u^4 + u^3 + u^2 + u)}{u^3 - u^2 - u + 1}$$

$$= \frac{u^4 - u^3 - u^2 + u - u^4 - u^3 - u^2 - u}{u^3 - u^2 - u + 1}$$

$$= \frac{-2u^3 - 2u^2}{u^3 - u^2 - u + 1}$$

$$= \frac{-2u^2(u+1)}{u^2(u-1) - 1(u-1)}$$

$$= \frac{-2u^2(u+1)}{(u-1)(u^2-1)} = \frac{-2u^2(u+1)}{(u-1)(u+1)(u-1)}$$

$$= -\frac{2u^2}{(u-1)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{(u-1)^2}{u^2}\, du = -2\frac{dx}{x}.$$

$$\left(\frac{u^2 - 2u + 1}{u^2}\right) du = -2\frac{dx}{x}$$

$$\left(1 - \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2}\right) du = -2\frac{dx}{x}$$

$$\therefore \int \left(1 - \frac{2}{u} + \frac{1}{u^2}\right) du = -2 \int \frac{dx}{x} + c$$

அதாவது $u - 2\log u - \frac{1}{u} = -2\log x + c$

$$xy - 2\log(xy) - \frac{1}{xy} = -2\log x + c$$

$$xy - 2(\log x + \log y) - \frac{1}{xy} = -2\log x + c$$

$xy - 2\log y - \frac{1}{xy} = c$ என்பது தீர்வு.

பயிற்சிகள் 4

பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க:

1. $(x+y)^2 \frac{dy}{dx} = a^2$
(B. E. '61, 63, 64 சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $\cos(x+y)\, dy = dx$

3. $\frac{dy}{dx} = (4x + y + 1)^2$

4. $\frac{dy}{dx} - x\tan(y-x) = 1$
(B. E. '61, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. $\frac{dy}{dx} + x\tan(y-x) = 1$
(B. E. '61, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

6. $\frac{dy}{dx} = ke^{x+y} - 1$ (B. E. '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. $x\frac{dy}{dx} = e^{-xy} - y$ (B. E. '70 மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

8. $y(xy+1)\,dx + x(xy-1)\,dy = 0$

9. $y(1 - xy + x^2y^2)\,dx + x(x^2y^2 - xy)\,dy = 0$

அமைப்பு II

§ 9. சமபடித்தானச் சமன்பாடுகள் : Homogeneous Equations)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{F(x, y)} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

என்ற அமைப்புடைய ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில், f, F இரண்டு சார்புகளும் x, y என்ற ராசிகளின் ஒத்த சமபடித்தான கோவைகளாக இருந்தால் (1) ஒரு சமபடித்தானச் சமன்பாடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 3x^2y}{x^3 + 3xy^2}$ என்பதில் வலப் பக்கத்துப் பின்னத்தின் மேற்கோவையும் கீழ்க்கோவையும் சம படித்தான முப்படிக் கோவைகள். ஆகவே, இது ஒரு சமபடித் தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(1)-ல் f, F இரண்டு சார்புகளும் x, y-ல் n படியுள்ள ஒத்த சமபடித்தான கோவைகளாக வைத்துக்கொள்வோம். அப்போது அவைகளை முறையே $x^n g\left(\frac{y}{x}\right)$, $x^n G\left(\frac{y}{x}\right)$ என்று எழுதலாம்.

∴ கொடுத்துள்ள சமன்பாடு இப்போது

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^n g\left(\frac{y}{x}\right)}{x^n G\left(\frac{y}{x}\right)} = \frac{g\left(\frac{y}{x}\right)}{G\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

என்ருகும்.

$$y = vx \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

என்று பிரதியிடுவோம்.

இந்த மாற்றத்தினுல், v புதிய சார்புடைய மாறியாக ஆகிறது. x சார்பில் மாறியாகவே இருக்கும்.

(3) ஐ x ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

(3), (4) இவைகளை (2)-ல் பிரதியிட்டால், கிடைப்பது

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{g(v)}{G(v)}$$

மாறிலிகளைப் பிரித்தால்,

$$\frac{G(v)}{g(v) - vG(v)}\, dv = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{g(v)}{G(v)} - v = \frac{g(v) - vG(v)}{G(v)}$$

$$\therefore \quad \int \frac{G(v)}{g(v) - vG(v)}\, dv = \int \frac{dx}{x} + c = \log x + c \quad \cdots \quad (5)$$

(5)-ல் $v = \frac{y}{x}$ என்று பிரதியிட்டால், தீர்வு கிடைக்கும்.

குறிப்பு : பொதுவாக ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

என்ற அமைப்பிலிருந்தால், அது சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு எனப்படும். இத்தகைய சமன்பாட்டின் தீர்வு காண $y = vx$ என்ற மாற்றம் பயன்படும். இந்த மாற்றத்தினால் சார்புடைய மாறி மாற்றப்படுகிறதென்பதை அறிந்துகொள்ளவேண்டும். இந்த மாற்றத்திற்கிணங்க, சமன்பாடு (6)

$$v + x\frac{dv}{dx} = f(v) \text{ என்று மாறுகிறது.}$$

அதாவது $x\dfrac{dv}{dx} = f(v) - v$

அல்லது $\dfrac{dv}{f(v) - v} = \dfrac{dx}{x}$

தொகையிட்டால்,

$$\int \frac{dv}{f(v) - v} = \log x + c \quad \cdots \quad \cdots \quad (7)$$

(7)-ல் $v = \frac{y}{x}$ என்று பிரதியிட்டால், தீர்வு கிடைக்கும்.

எடுத்துகாட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$(5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3)\, dx + (2x^3y - 3x^2y^2 - 5y^4)\, dy = 0$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{2x^3y - 3x^2y^2 - 5y^4}$$

$$= \frac{5x^4 + 3x^2y^2 - 2xy^3}{5y^4 + 3x^2y^2 - 2x^3y} \quad \cdots \quad (1)$$

$$y = vx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்று பிரதியிடுவோம்.

$$\therefore \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2), (3) இவைகளை (1)-ல் பிரதியிட்டால், கிடைப்பது

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{5x^4 + 3x^4v^2 - 2x^4v^3}{5v^4x^4 + 3x^4v^2 - 2x^4v}$$

$$= \frac{5 + 3v^2 - 2v^3}{5v^4 + 3v^2 - 2v}$$

$$\therefore x\frac{dv}{dx} = \frac{5 + 3v^2 - 2v^3}{5v^4 + 3v^2 - 2v} - \frac{v}{1}$$

$$= \frac{5 + 3v^2 - 2v^3 - 5v^5 - 3v^3 + 2v^2}{5v^4 + 3v^2 - 2v}$$

$$= \frac{-5v^5 - 5v^3 + 5v^2 + 5}{5v^4 + 3v^2 - 2v}$$

$$= \frac{-5(v^5 + v^3 - v^2 - 1)}{5v^4 + 3v^2 - 2v}$$

$$\therefore \frac{(5v^4 + 3v^2 - 2v)}{v^5 + v^3 - v^2 - 1}dv = -5\frac{dx}{x}$$

அதாவது, $\dfrac{d(v^5 + v^3 - v^2 - 1)}{v^5 + v^3 - v^2 - 1} = -5\dfrac{dx}{x}$

தொகையிட்டால்,

$$\log(v^5 + v^3 - v^2 - 1) = -5\log x + \log c$$

$$\log(v^5 + v^3 - v^2 - 1) + 5\log x = \log c$$

$$\log(v^5 + v^3 - v^2 - 1) + \log x^5 = \log c$$

$$\log(v^5 + v^3 - v^2 - 1)x^5 = \log c$$

அல்லது $(v^5 + v^3 - v^2 - 1)x^5 = c$

$$\left(\frac{y^5}{x^5} + \frac{y^3}{x^3} - \frac{y^2}{x^2} - 1\right)x^5 = c$$

$y^5 + x^2y^3 - x^3y^2 - x^5 = c$ என்பது தீர்வு.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 + 3x^2 y}{x^3 + 3xy^2} \quad \text{(B. E. '64)}$$

$$y = vx \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்று பிரதியிடுவோம்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^3 x^3 + 3x^3 v}{x^3 + 3x^3 v^2}$$

$$= \frac{v^3 + 3v}{1 + 3v^2} \text{ என்று மாறும்.}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \frac{v^3 + 3v}{1 + 3^2 v^2} - v = \frac{v^3 + 3v - v - 3v^3}{1 + 3v^2}$$

$$= \frac{2v - 2v^3}{1 + 3v^2} = \frac{2v(1 - v^2)}{1 + 3v^2}$$

$$\therefore \quad \frac{(1 + 3v^2)\,dv}{v(1 - v^2)} = 2\frac{dx}{x}$$

தொகையிட்டால்,

$$\int \frac{1 + 3v^2}{v(1 - v^2)}\,dv = 2\int \frac{dx}{x} + c' \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

இடப்புறத்தைக் கண்டுபிடிக்க, தொகைச் சார்பைப் பகுதி பின்னங்களாக பிரித்துக் கொள்ளலாம்.

$$\frac{1 + 3v^2}{v(1 - v^2)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{1 - v} + \frac{C}{1 + v} \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

என்றல்,

$$1 + 3v^2 = A(1 - v)(1 + v) + Bv(1 + v) + cv(1 - v) \dots (5)$$

இதில் முறையே $v = 0,\ 1,\ -1$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$1 = A(1)(1) \qquad \therefore \quad A = 1$$

$$1 + 3 = B(1)(2) = 2B \qquad \therefore \quad B = 2$$

$$1 + 3 = C(-1)(2) = -2C \qquad \therefore \quad C = -2$$

$$\therefore \quad \frac{1+3v^2}{v(1-v^2)} = \frac{1}{v} + \frac{2}{1-v} - \frac{2}{1+v} \quad \ldots \quad (6)$$

(3)-ன் இடப்புறத்தில் (6)ஐப் பிரதியிட்டால்,

$$\int \frac{dv}{v} + 2\int \frac{dv}{1-v} - 2\int \frac{dv}{1+v} = 2\int \frac{dx}{x} + c'$$

$$\log v - 2\log(1-v) - 2\log(1+v) = 2\log x + c'$$

$$2\log x + 2\log(1-v) + 2\log(1+v) = \log v - c'$$

$$\log x^2 + \log(1-v)^2 + \log(1+v)^2 = \log v + \log c$$

(இங்கு $-c' = \log c$)

$$\log x^2 (1v)^2 (1+v)^2 = \log cv$$

அதாவது, $x^2(1-v)^2(1+v)^2 = cv$

$$x^2\left(1-\frac{y}{x}\right)^2\left(1+\frac{y}{x}\right)^2 = \frac{cy}{x}$$

$$\frac{x^2(x-y)^2}{x^2}\cdot\frac{(x+y)^2}{x^2} = \frac{cy}{x}.$$

$$(x-y)^2(x+y)^2 = cxy$$

$(x^2-y^2)^2 = cxy$ என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்வு காண்க :

$$x\,dy - y\,dx = \sqrt{x^2+y^2}\,dx$$

(B. E. '65, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$x\,dy = (y+\sqrt{x^2+y^2})\,dx$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இது சமபடித்தான சமன்பாடு என்பது இப்போது தெரிகிறது.

$$y = vx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்று பிரதியிடுவோம்.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(3), (2) இவற்றை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{vx + \sqrt{x^2 + v^2 x^2}}{x} = v + \sqrt{1 + v^2}$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1+v^2}$$

$$\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \frac{dx}{x}$$

தொகையிட்டால்,

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = \int \frac{dx}{x} + c^1$$

$$\log(v + \sqrt{1+v^2}) = \log x + \log c = \log cx$$

$$v + \sqrt{1+v^3} = cx$$

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} = cx$$

அல்லது $y + \sqrt{x^2 + y^2} = cx^2$ தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 : தீர்வு காண்க :

$$\left(x \tan \frac{y}{x} - y \sec^2 \frac{y}{x}\right) dx + x \sec^2 \frac{y}{x}\, dy = 0.$$

சமன்பாட்டின் உறுப்புக்களின் அமைப்பிலிருந்து $\frac{y}{x} = v$ அல்லது $y = vx$ என்ற பிரதியீடு பயனளிக்குமென்று ஊகிக்கலாம்.

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு.

$$\left(x \tan \frac{y}{x} - y \sec^2 \frac{y}{x}\right) + x \sec^2 \frac{y}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \quad \dots (1)$$

என்பதாகும்.

$y = vx$ என்றால், $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

$\therefore$ (1) உடைய மாற்றம்

$$x \tan v - v\, x \sec^2 v + x \sec^2 v \left(v + x\frac{dv}{dx}\right) = 0$$

என்பதாகும்.

$$\therefore \quad x \tan v + x^2 \operatorname{sce}^2 v \frac{dv}{dx} = 0$$

x ஐ நீக்கினல்,

$$\tan v \cdot dx + x \sec^2 v \, dv = 0.$$

$x \tan v$ ஐக் கொண்டு வகுத்தால்,

$$\frac{dx}{x} + \frac{\sec^2 v}{\tan v} dv = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{d(\tan v)}{\tan v} = 0$$

தொகையிட்டால்,

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{d(\tan v)}{\tan v} c^1$$

$$\log x + \log \tan v = \log c$$

$$\log(x \tan v) = \log c$$

அல்லது $$x \tan v = c$$

$$x \tan \frac{y}{x} = c$$ என்பது தீர்வாகும்.

பயிற்சிகள் 5

பின் வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க :

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$ (B. E. '54, அண்ணுமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $x+y \frac{dy}{dx} = 2y$ (B. E. '62, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

3. $(x-2y) \frac{dy}{dx} + x = 0$

(B. E. '60, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2+y^2}$ (B. E. '63, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. $2xy + (y^2-x^2) \frac{dy}{dx} = 0$

(B. E. '44, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

6. $x(y-x) \frac{dy}{dx} = y^2$

(B. E. '62, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. $(x^2 + y^2)\, dx - 2xy\, dy = 0$
(B. E. '62, '64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

8. $x^2 \dfrac{dy}{dx} = y^2 + 2xy$; $x = 1, y = 1$ என்பதற்கிணங்க
(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

9. $x \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y^2}{x} = y$
(B. E. '50, ஆந்திராப் பல்கலைக்கழகம்;
B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

10. $(y^2 - 2xy)\, dx = (x^2 - 2xy)\, dy$
(B. E. '59, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

11. $x (y-x)\, dy = y (y+x)\, dx$
(B. E. '56, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

12. $(x^2-4xy-2y^2)\, dx + (y^2-4xy-2x^2)\, dy = 0$
(B. E. '62, 71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

13. $x^2y\, dx - (x^3+y^3)\, dy = 0$
(B. E. '64, அண்ணமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3+y^3}{xy^2}$ (B. E. '63, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

15. $(x^2y-2xy^2)\, dx - (x^3-3x^2y)\, dy = 0$
(B. E. '63, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

16. $z\, dy + \dfrac{y^3}{z^2-y^2}\, dz = 0$
(B. E. '64, வெங்கடேசாப் பல்கலைக்கழகம்)

17. $x (2y^4-x^4) \dfrac{dy}{dx} = y (y^4-x^4)$
(B. E. '64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

18. $(x^2-2y^2)\, dx + xy\, dy = 0$
(B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

19. $xy^3 \dfrac{dy}{dx} = x^4 + 2y^4$
(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலை

20. $(y^2 - xy)\, dx = (x^2 + 2xy)\, dy$

(B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

21. $(x + y)^2\, dx = 2x^2\, dy$

(B. E. '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

22. $(x^2 - y^2)\dfrac{dy}{dx} = xy$

(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

23. $x\dfrac{dy}{dx} = y + xe^{\frac{y}{x}}.$

24. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}(\log y - \log x + 1)$

25. $\left(1 = e^{\frac{x}{y}}\right) dx + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \dfrac{x}{y}\right) dy = 0$

26. $x\dfrac{dy}{dx} = y + x \sin\left(\dfrac{y}{x}\right)$

(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

அமைப்பு III

§ 10. சமபடியில்லாதச் சமன்பாடுகள் (Nonhomogeneous equations) :

ஒரு வகைக் கெழுச் சமன்பாடு கீழ்க்கண்ட வடிவத்தில் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a'x + b'y + c'} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இங்கு a, b, c, a', b', c' கொடுத்துள்ள மாறிலிகள். (1)-ல் வலப்புறத்துப் பின்னத்தின் மேற்கோவையும் கீழ்க் கோவையும் சமபடியில்லாதவை. அவைகள் x, y-ல் ஒருபடிக் கோவைகள். இம் மாதிரி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைக் கீழ்க் கண்ட முறையில் மாற்றங்கள் செய்து சமபடித்தான சமன்பாடுகளாகக் கொண்டு வரலாம். பின் § 9 முறைப் பிரகாரம் அவற்றின் தீர்வு காண இயலும்.

$$x = X + l \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$y = Y + m \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

என்று பிரதியிடுவோம். இதில் X, Y முறையே புதிய சார்பில் மாறி, சார்புடைய மாறிகளாகும். l, m என்பவை மாறிலிகள். அவைகளை நாம் பிற்பட்டுத் தேவைக்குத் தகுந்தபடி அமைத்துக் கொள்ளலாம்.

(2), (3)-லிருந்து $dx = dX, \quad dy = dY.$

இப்போது (1) மாறுவது

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + (al + bm + c)}{a'X + b'Y + (a'l + b'm + c')} \quad \ldots \quad (4)$$

என்றபடி, l, m இவற்றை நம் விருப்பப்படி அமைத்துக் கொள்ளலாம். ஆகையால்,

$$al + bm + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$$a'l + b'm + c' = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு l, m மதிப்புகளைத் தீர்மானித்துக் கொள்வோம்.

எனவே, (4)-லிருந்து கிடைப்பது

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{a'X + b'Y} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

என்ற சமபடித்தான சமன்பாடு.

ஆகவே, $Y = vX$ என்று பிரதியிட்டு, § 9-ல் கூறியபடி, (7)-ன் தீர்வு காணலாம்.

கிடைத்த தீர்வு $f(X, Y) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$

என்றால், அதில் $X = x - l$, $Y = Y - m$ எனப் பிரதியிட்டு,

முடிவில் $f(x - l, y - m) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$

என்பது தீர்வாகும்.

குறிப்பு: கொடுத்துள்ள சமன்பாடு (1)-ல் $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ என்று கொள்வோம். இந்த நிலையில் மேற்குறித்த மாற்றும் முறை பயனளிக்காது.

ஏனெனில் l, m இவைகளைக் காண இயலாது.

$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = k$ என்போம்.

$\therefore \quad a = a'\,k, \;\; b = b'\,k.$

சமன்பாடு (5) மாறுவது $a'\,kl + b'\,km + c = 0$ என்றபடி,

அதாவது, $a'\,l + b'\,m + \frac{c}{k} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (10)$

$$a'\,l + b'\,m + c' = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

(10), (6) இவைகள் ஒன்றுக்கொன்று முரணானதாக இருக்கும் சமன்பாடுகள். அவைகளைத் தீர்க்க இயலாது. l, m மாறிலிகளைக் கண்டுபிடிக்க முடியாததால், கொடுத்துள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண இயலாது.

இந்த நிலையில், கொடுத்துள்ள சமன்பாடு,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a'kx + b'ky + c}{a'x + b'y + c'}$$

$$= \frac{k\,(a'x + b'y) + c}{a'x + b'y + c'} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (11)$$

என்று மாறும்.

இப்போது $a'x + b'y = u \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (12)$

என்று பிரதியிடுவோம்.

$$\therefore \; a' + b'\,\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{du}{dx} - a'}{b'} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (13)$$

(13), (12) இவைகளை (11)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{\frac{du}{dx} - a'}{b'} = \frac{ku + c}{u + c'}$$

$\frac{du}{dx} = a' + b'\left(\frac{ku + c}{u + c'}\right) = \phi\,(u)$ என்று கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \frac{du}{\phi(u)} = dx$$

$$\int \frac{du}{\phi(u)} = x + c \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (14)$$

(14)லிருந்து u, x இவைகளுக்குள்ள தொடர்பு கிடைக்கும். அதில் $u = a'x + b'y$ என்று பிரதியிட்டால், முடிவில் தீர்வு கிடைக்கும்.

எடுத்துகாட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y-3}{2x+y-3}$$ (B. E. '63, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம் ; B. E. '64, அண்ணமலைப் பல்கலைக்கழகம்; B. E. '70, மதுரைப் பல்கலைக் கழகம்)

$x = X + l$, $y = Y + m$ என்று பிரதியிடுவோம்.

இவற்றில் l, m மாறிலிகள்.

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு மாறியபின் கிடைப்பது

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y + (l + 2m - 3)}{2X + Y + (2l + m - 3)} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$l + 2m - 3 = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$2l + m - 3 = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

என்ற நிபந்தனைகளிலிருந்து l, m தீர்மானிக்கப்படுகின்றன.

(2), (3) இவைகளைத் தீர்த்து $l = 1 = m$ என்று கிடைக்கிறது.

$\therefore$ (1)-ன் புதிய அமைப்பு

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y}{2X + Y} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

என்பது.

$$Y = vX \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5)$$

என்று பிரதியிடுவோம்.

$$\therefore \quad \frac{dY}{dX} = v + X\frac{dv}{dX} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

(6), (5) இவற்றை (4)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{X + 2vX}{2X + vX} = \frac{1 + 2v}{2 + v}$$

$$\therefore \quad X\frac{dv}{dX} = \frac{1 + 2v}{2 + v} - \frac{v}{1} = \frac{1 - v^2}{2 + v}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{2+v}{1-v^2}\right) dv = \frac{dX}{X} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

தொகையிட்டால்,

$$\int \frac{2+v}{1-v^2}\, dv = \int \frac{dx}{X} + c' \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$$

இடப்புறத்தைக் கண்டுபிடிக்க, தொகைச் சார்பைப் பகுதிபின்னங்களாகப் பிரித்துக் கொள்ளலாம்.

$$\frac{2+v}{1-v^2} = \frac{A}{1-v} + \frac{B}{1+v} \text{ என்றால்,}$$

$$2 + v = A(1 + v) + B(1 - v)$$

இதில் முறையே $v = 1, -1$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$2 + 1 = A(1 + 1) = 2A \quad \therefore \quad A = \frac{3}{2}$$

$$2 - 1 = B(1 + 1) = 2B \quad \therefore \quad B = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \frac{2 + v}{1 - v^2} = \frac{3}{2(1 - v)} + \frac{1}{2(1 + v)} \quad \ldots \quad (9)$$

(8)-ன் இடப்புறத்தில் (9) ஐப் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{3}{2}\int \frac{dv}{1 - v} + \frac{1}{2}\int \frac{dv}{1 + v} = \int \frac{dX}{X} + c'$$

$$-\frac{3}{2}\log(1 - v) + \frac{1}{2}\log(1 + v) = \log X + c'$$

$$-3\log(1 - v) + \log(1 + v) = 2\log X + 2c'$$

$$\log \frac{1}{(1-v)^3} + \log(1+v) = \log X^2 + \log c$$

$$\log \frac{1+v}{(1-v)^3} = \log cX^2$$

$$\therefore \frac{1+v}{(1-v)^3} = cX^2$$

அதாவது $$\frac{1+\frac{Y}{X}}{\left(1-\frac{Y}{X}\right)^3} = cX^2 \left(\because v = \frac{Y}{X}\right)$$

அல்லது $$\frac{X+Y}{(X-Y)^3} = c$$

$$X + Y = c(X-Y)^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10)$$

ஆனால் $x = X + l = X + 1$

$y = Y + m = Y + 1$

$\therefore \quad X = x - 1, \quad Y = y - 1$

இவற்றை (10)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$x - 1 + y - 1 = c(x - 1 - y + 1)^3$$

அல்லது $x + y - 2 = c(x-y)^3$ முடிவான தீர்வு.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$(4x + 2y + 1)\frac{dy}{dx} = 2x + y - 3$$

(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு $$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y - 3}{4x + 2y + 1} \quad \ldots \quad (1)$$

இங்கு $x = X + l$, $y = Y + m$ என்ற மாற்றம் பயனளிக்காது. ஏனெனில், $2l + m - 3 = 0$, $4l + 2m + 1 = 0$ என்ற சமன்பாடுகள் ஒன்றுக்கொன்று முரணானதாகி l, m காண இயலாது.

$\therefore \quad u = 2x + y$ எனக் கொள்வோம்.

$$\frac{du}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx} \quad \text{அல்லது} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 2$$

இப்போது (1) மாறுவது

$$\frac{du}{dx} - 2 = \frac{u-3}{2u+1} \quad \text{என்றபடி.}$$

$$\therefore \quad \frac{du}{dx} = \frac{2(2u+1)+u-3}{2u+1} = \frac{5u-1}{2u+1}$$

$$\frac{2u+1}{5u-1}\,du = dx$$

$$\left[\frac{2}{5} + \frac{7}{5(5u-1)}\right] du = dx$$

தொகையிட்டால்,

$$\frac{2u}{5} + \frac{7}{25}\log(5u-1) = x + c$$

$$\frac{2}{5}(2x+y) + \frac{7}{25}\log(10x+5y-1) = x + c \text{ என்பது}$$

தீர்வாகும்.

பயிற்சிகள் 6

பின்வரும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காண்க:

(1 லிருந்து 17 வரை)

1. $(2x + 18y - 14)\dfrac{dy}{dx} = (6x + 5y - 7)$

(B. E. '65, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $(3y - 7x + 7)\,dx + (7y - 3x + 3)\,dy = 0.$

(B. E. '66, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்;

(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

3. $(2x - y + 1)\,dx = (2y - x - 1)\,dy$

(B. E. '51, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

4. $(x + y + 1)\,dx + (3x + 4y + 4)\,dy = 0$

(B. E. '61, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. $\frac{dy}{dx} + \frac{10x+8y-12}{7x+5y-9} = 0$

(B. E. '61, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+7y+2}{3x+5y+6}$

(B. E. '61, 64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. $(3x+y-5)\frac{dy}{dx} = 2x+2y-2$

(B. E. '52, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

8. $\frac{dy}{dx} = \frac{4-2x-y}{x+2y+1}$

(B. E. '50, ஆந்திராப் பல்கலைக்கழகம்)

9. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+1}{3x+2y+2}$

(B. E. '65, வெங்கடேசாப் பல்கலைக்கழகம்)

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{4x-3y-1}{3x+4y-7}$

(B. E. '70, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

11. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{2x+2y+1}$

(B. E. '65, '66, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

12. $(x+y-1)\,dy = (x+y+1)\,dx$

(B. E. '50, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

13. $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y+1}{2x+4y+3}$

(B. E. '57, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

14. $(2x+3y+4)\,dx = (4x+6y+5)\,dy$

15. $(4x-6y-1)\,dx-(2x-3y+2)\,dy = 0$

(B. E. '63, '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

16. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+5}{x+y-1}$

(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

17. $y'(x) = \dfrac{x - y - 1}{y - x - 1}$

(B. E. '70, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

18. $(4x + 3y + 1)\, dx + (3x + 2y + 1)\, dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு ஒரு அதிபர வளைவுக்குடும்பத்தைக் குறிக்கிறதென்றும், அதிலடங்கிய அதிபரவளைவுகளெல்லாவற்றிற்கும் தொலைத்தொடு கோடுகள் பொதுவானவை என்றும் காட்டுக. (B. E. '53, அண்ணமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

§ 11. அமைப்பு IV : பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Exact differential equations)

$z = f(x, y)$ என்ற சார்பை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் x, y என்பன ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பில்லாத இரண்டு மாறிகள். அவைகள் ஒரே சமயத்தில் சேர்ந்தாற்போல் மாறினால், z-ன் மதிப்பும் மாறும். z-ன் கூடிய வகையீடு (total differential) கீழ்க் கண்ட சூத்திரத்தின் மூலம் நமக்குக் கிடைக்கிறது.

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy$$

இங்கு நேரிடையாக x, y கொண்ட சார்பிலிருந்து வகையீடு dz கிடைக்கிறது. ஆகவே அதற்கு பொருத்தமான வகையீடு அல்லது நிறை வகையீடு (exact differential, perfect differential) எனப்பெயர். எடுத்துக்காட்டாக, $z = x(x + y) = x^2 + xy$ என்றால்,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

$$\therefore \quad dz = (2x + y)\, dx + x\, dy$$

$(2x + y)\, dx + x\, dy$ என்ற வகையீடு, பொருத்தான வகையீடாக இருக்கிறது.

சில வகையீடுகள் பொருத்தமானதாக இருக்காது. எடுத்துக் காட்டாக, $(x^2 + y)\, dx + y^2\, dy$ என்பது பொருத்தமானதல்ல. இந்த வகையீடு நேரிடையாகக் கிடைக்கக்கூடிய $f(x, y)$ என்ற சார்பு கண்டுபிடிக்க இயலாது.

ஒரு பொருத்தமான வகையீட்டை பூச்சியத்துக்குச் சமப் படுத்தினல், ஒரு பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு கிடைக்கும். ஆகவே $(2x + y)\,dx + x\,dy = 0$ என்பது ஒரு பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

இனி ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு பொருத்தமானதாயிருப் பதற்குத் தேவையான நிபந்தனையையும் அந்த நிபந்தனைக்குக் கட்டுப்பட்ட சமன்பாட்டைத் தீர்ப்பதையும் ஆராய்வோம்.

§ 12. முதல் வரிசை, முதற்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு பொருத்தமானதாக அமைவதற்கு நிபந்தனை :

கொடுத்துள்ள முதல் வரிசை, முதற்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

$$M\,dx + N\,dy = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்று கொள்வோம். இதில் M, N இரண்டும் x, y-ல் சார்புகள்.

(1) பொருத்தமானதாயிருப்பின், $M\,dx + N\,dy$ ஒரு பொருத் மான வகையீடாக அமைய வேண்டும். அதாவது x, y-ல் u என்ற ஏதேனுமொரு சார்பிலிருந்து, நேரிடையாக வழிவந்த வகை யீடாக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது $$M\,dx + N\,dy = du \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

ஆனல் $$du = \frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

∴ (2), (3) இவைகளிலிருந்து

$$M = \frac{\partial u}{\partial x} \ldots (4) \qquad N = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

ஆகவே கொடுத்துள்ள சமன்பாடு பொருத்தமானதாக இருப் பதற்கு (4), (5) இரண்டும் தேவையான (necessary) கட்டுப் பாடுகள். இவைகளிலிருந்து u ஐ நீக்கி, ஒரு தனிக் கட்டுப்பாடு கண்டுபிடிக்கலாம்.

(4)-லிருந்து, $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial x}$$

(5)-லிருந்து, $$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}$$

ஆனுல் $$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

இந்த நிபந்தனை (6), சமன்பாடு (1) பொருத்தமானதாக இருப்பதற்குத் தேவையானது.

§ 13. மறுதலையாக, $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ என்ற நிபந்தனையின்கீழ் $M\,dx + N\,dy$ ஒரு பொருத்தமான வகையீடாகும் என்பதை இப்போது நாம் நிரூபணம் செய்யவேண்டும்.

கொடுத்துள்ள நிபந்தனை $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

M என்ற சார்பில், y ஐ ஒரு மாறிலியாகக் கொண்டு, x ஐப் பொருத்த நுண் தொகை $\int M\,dx = V \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $$\frac{\partial V}{\partial x} = M \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(3) ஐ இரு புறமும் y ஐப் பொருத்து பகுதி வகையிட்டால்,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} \quad \ldots \quad (4) \qquad [\,(1) \text{ ஐப் பயன்படுத்தி}\,]$$

ஆனுல் $$\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

(4), (5) இவற்றிலிருந்து,

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

இருபுறமும் x ஐப் பொருத்துத் தொகையிட்டால்,

$$N = \frac{\partial V}{\partial y} + c$$

இங்கு c, x இல்லாத ஒரு மாறிலி.

ஆகவே, $c = f(y)$ என்று கொள்வோம்.

$$\therefore \quad N = \frac{\partial V}{\partial y} + f(y) \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \qquad (7)$$

(3), (7) இவைகளைப் பயன்படுத்தி,

$$\begin{aligned} M\,dx + N\,dy &= \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \left[\frac{\partial V}{\partial y} + f(y)\right] dy \\ &= \left(\frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy\right) + f(y)\,dy \\ &= dV + f(y)\,dy \\ &= dV + d\left[\int f(y)\,dy\right] \\ &= d\left[V + \int f(y)\,dy\right] \qquad \dots \quad \dots \qquad (8) \\ &= \text{ஒரு பொருத்தமான வகையீடு} \end{aligned}$$

ஆகவே $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ என்ற நிபந்தனை இருந்தால், $M\,dx + N\,dy$ என்பது ஒரு பொருத்தமான வகையீடாக அமைகிறது. அப்போது $M\,dx + N\,dy = 0$ ஒரு பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

§ 12, § 13 இவைகளின் முடிவுகளை இணைத்தால், பின்வரும் முக்கிய தேற்றம் நமக்குக் கிடைக்கிறது.

$M\,dx + N\,dy = 0$ என்ற ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு பொருத்தமானதாயிருப்பதற்கு, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ என்ற நிபந்தனை, தேவையானதும் போதுமானதுமாகும். (The condition is both necessary and sufficient).

§ 14. பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வு காணும் முறை :

$M\,dx + N\,dy = 0$ என்பது ஒரு பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடானால். $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ என்ற நிபந்தனை உண்டு.

இந்த நிபந்தனைக்குட்பட்டு,

$$Mdx + Ndy = d\left[V + \int f(y)\,dy\right.$$

[§ (13)-ல் (8)ஆவது சமன்பாடு]

∴ கொடுத்துள்ள சமன்பாடு,

$$d\,[V + \int f(y)\,dy] = 0$$ என்றாகும்.

இதைத் தொகையிட்டால்,

$$V + \int f(y)\,dy = c$$ என்பது தீர்வு. ... (A)

இங்கு $V = \int Mdx$ (y மாறிலி)

[§ (13)-ல் (2) ஆவது சமன்பாடு]

$$f(y) = N - \frac{\partial V}{\partial y}$$ [§ (13)-ல் (7)வது சமன்பாடு]

$$= N - \frac{\partial}{\partial y} \int Mdx$$

∴ V, $f(y)$-க்கு மேற்கண்டவற்றை (A)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\underbrace{\int Mdx}_{(y \text{ மாறிலி})} + \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int Mdx \right] dy = C \quad \dots \quad \text{(I)}$$

இவ்வாறே,

$$\underbrace{\int Ndy}_{(x \text{ மாறிலி})} + \int \left[M - \frac{\partial}{\partial x} \int Ndy \right] dx = C \quad \dots \quad \text{(II)}$$

I அல்லது II $Mdx + Ndy = 0$ என்ற பொறுத்தமான சமன்பாட்டின் தீர்வாகும்.

முக்கியக் குறிப்பு :

$$N - \frac{\partial}{\partial y} \int Mdx = f(y)$$

= y மட்டும் கொண்ட சார்பு

$$\therefore \int \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int Mdx \right] dy$$

என்ற தொகையில் y மட்டிலுந்தான் இடம் பெறும். ஆகவே நடைமுறையில்,

$$\int \left[N - \frac{\partial}{\partial y} \int Mdx \right] dy$$

என்பதற்குப் பதிலாக $\int$ (N-ல் x இல்லாத உறுப்புகள்) dy என்று சொன்னால் போதுமானது.

$\therefore$ I ஐப் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$\underset{y \text{ மாறிலி}}{\int M dx} + \int (N\text{-ல் } x \text{ இல்லாத உறுப்புகள்})\, dy = C$$

ஆகவே $Mdx + Ndy = 0$ என்ற பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகாண, கீழ்க்கண்ட செய்முறை (working rule) மிக்கப் பயனளிக்கும் :

(i) y-ஐ மாறிலியாகக் கொண்டு Mdx ஐத் தொகையிடவும்.

(ii) N-ல் x இல்லாத உறுப்புகளை மட்டும் வைத்துக்கொண்டு $N dy$ ஐத் தொகையிடவும்.

(iii) இரண்டு தொகைகளையும் கூட்டி ஒரு மாறிலிக்குச் சமப்படுத்தவும்.

தீர்வு காணும் வழி பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளால் நன்கு விளங்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$(x^2 - 4xy - 2y^2)\, dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\, dy = 0$$

(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

இங்கு $M = x^2 - 4xy - 2y^2$, $N = y^2 - 4xy - 2x^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -4x - 4y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -4y - 4x$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ஆகவே சமன்பாடு பொருத்தமானதாக இருக்கிறது.

$$\underset{y \text{ மாறிலி}}{\int M\, dx} = \underset{y \text{ மாறிலி}}{\int (x^2 - 4xy - 2y^2)\, dx}$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2x^2 y - 2y^2 x \quad \dots \quad (1)$$

N-ல் x இல்லாத உறுப்பு $= y^2$

$$\therefore \quad \int (N\text{-ல் } x \text{ இல்லாத உறுப்பு})\, dy = \int y^2\, dy = \frac{y^3}{3} \quad ..(2)$$

$$\therefore \quad \frac{x^3}{3} - 2x^2 y - 2y^2 x + \frac{y^3}{3} = c'$$

அல்லது $x^3 - 6x^2 y - 6y^2 x + y^3 = c$ என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x^3 \sec^2 y \dfrac{dy}{dx} + 3x^2 \tan y = \cos x$ என்பது பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு என்று காட்டவும். அப்படியானால், அதன் தீர்வு யாது ? (B. E. '70, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை மாற்றி யெழுதினல்

$(3x^2 \tan y - \cos x)\, dx + x^3 \sec^2 y\, dy = 0$ என்று கிடைக்கும்.

இங்கு $M = 3x^2 \tan y - \cos x$; $N = x^3 \sec^2 y$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 \sec^2 y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 \sec^2 y$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

ஆகவே சமன்பாடு பொருத்தமானதாக இருக்கிறது.

$$\int_{y \text{ மாறிலி}} M\, dx = \int_{y \text{ மாறிலி}} (3x^2 \tan y - \cos x)\, dx = x^3 \tan y - \sin x$$

N-ல் x இல்லாத உறுப்பு இல்லை.

$\therefore \quad x^3 \tan y - \sin x = c$ என்பது தீர்வு.

பயிற்சிகள் 7

பின்வரும் சமன்பாடுகள் பொருத்தமானவை என்பதை சரி பார்த்துத் தீர்வு காண்கவும்.

1. $(5x^4 + 3x^2 y^2 - 2xy^3)\, dx + (2x^3 y - 3x^2 y^2 - 5y^4)\, dy = 0$
2. $(1 + 4xy + 2y^2)\, dx + (1 + 4xy + 2x^2)\, dy = 0$ (B. E. '64)

3. $(x^2 - 2xy - y^2)\,dx - (x+y)^2\,dy = 0$ (B. E. '62)

4. $(y^2 + 2xy + 1)\,dx + (2xy + x^2)\,dy = 0$ (B.E. '64)

5. $y(x^2 + y^2 + a^2)\dfrac{dy}{dx} + x(x^2 + y^2 - a^2) = 0$
(B. E. '66)

6. $(x^2 + y^2 - a^2)\,xdx + (x^2 - y^2 - b^2)\,ydy = 0$

7. $(2ax + by + g)\,dx + (2cy + bx + e)\,dy = 0$

8. $(1 + 6y^2 - 3x^2y)\,dy = (3xy^2 - x^3)\,dx$
(B. E. '52, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

9. $(3x^2y + 2x - y^3)\,dx + (x^3 - 3y^2x)\,dy = 0$
(B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

10. $(2xy + y - \tan y)\,dx + (x^2 - x\tan^2 y + \sec^2 y)\,dy = 0$
(B. E. '48)

11. $(x^2 - 2xy) + (\sin y - x^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$
(B. E. '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

12. $(\cos^2 x - \cos x \sin\alpha \sin y)\,dx + (\cos^2 y - \sin\alpha \sin x \cos y)\,dy = 0$
(B. E. '50, ஆந்திராப் பல்கலைக்கழகம்)

13. $[\cos x \tan y + \cos(x+y)]\,dx + [\sin x \sec^2 y + \cos(x+y)]\,dy = 0$

14. $\sin x \sin^2 y\,dx - (\cos x \cos^2 y \tan y + \cos x \tan y)\,dy = 0$
(B. E. '72, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

15. $(2x^2y + 4x^3 - 12xy^2 + 3y^2 - xe^y + e^{2x})\,dy + (12x^2y + 2xy^2 + 4x^3 - 4y^3 + 2ye^{2x} - e^y)\,dx = 0$

16. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)dx + \left(1 - \dfrac{x}{y}\right)e^{\frac{x}{y}}\,dy = 0$

17. $(e^y + y\cos xy)\,dx + (xe^y + x\cos xy)\,dy = 0$
(B. E. '65, வெங்கடேசா பல்கலைக்கழகம்)

§15. தொகையீட்டுக் காரணிகள் (Integrating factors)

$M\,dx + N\,dy = 0$ என்ற சமன்பாடு நேரடியாகப் பொருத்தமானதாக இல்லாவிடினும், ஒரு தகுந்த காரணியால் பெருக்கினால், அதைப் பொருத்தமான சமன்பாடாக்கலாம். அம்மாதிரி பெருக்கும் காரணிக்கு தொகையீட்டுக் காரணி என்று பெயர். எடுத்துக்காட்டாக, $y(1 + xy)\,dx - x\,dy = 0$ என்ற சமன்பாடு பொருத்தமானதாக இல்லை.

[இங்கு $M = y(1 + xy) = y + xy^2$, $N = -x$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 + 2xy,\quad \frac{\partial N}{\partial x} = -1\,;\qquad \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.]$$

மேற்கண்ட சமன்பாட்டை $y\,dx - x\,dy + xy^2\,dx = 0$ என்று எழுதலாம்.

இதை முழுவதும் y^2 ஆல் வகுத்தால்,

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} + x\,dx = 0$$

அதாவது $$d\left(\frac{x}{y}\right) + d\left(\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

அல்லது $$d\left(\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2}\right) = 0$$

இது ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடு.

இதனுடைய தீர்வு $\dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{2} = c$ என்பதாகும்.

ஆகவே, இங்கு $\dfrac{1}{y^2}$ ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

$M\,dx + N\,dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு தொகையீட்டுக் காரணிகளைக் கண்டு பிடிப்பதற்குப் பொதுவாக ஒரு முறையும் இல்லையெனலாம். பெரும்பாலும் கொடுத்துள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் உறுப்புகளை சரியாக ஒழுங்கு படுத்தி தொகுத்தால், ஒவ்வொரு தொகுப்பையும் ஒரு நேரான வகையீடாக்க, தகுந்த காரணியை நிர்ணயம் செய்துவிடலாம். அடிக்கடி சமன்பாடுகளில் வரக்கூடிய சில உறுப்புகளின் தொகுப்புகளும் அவை

களுக்குகந்த தொகையீட்டுக் காரணிகளும் கீழே கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. காரணியால் பெருக்கியபின் ஏற்படும் பொருத்தமான வகையீடு காட்டப்பட்டிருக்கிறது.

உறுப்புகளின் தொகுப்பு (1)	தொகையீட்டுக் காரணி (2)	பொருத்தமான வகையீடு (3)
$x\,dy - y\,dx$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)$
$y\,dx - x\,dy$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)$
$2xy\,dy - y^2\,dx$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{2xy\,dy - y^2\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y^2}{x}\right)$
$2xy\,dx - x^2\,dy$	$\frac{1}{y^2}$	$\frac{2xy\,dx - x^2\,dy}{y^2} = d\left(\frac{x^2}{y}\right)$
$x\,dy - y\,dx$	$\frac{1}{xy}$	$\frac{x\,dy - y\,dx}{xy} = \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x}$ $= d(\log y) - d(\log x)$ $= d(\log y - \log x)$ $= d\log\left(\frac{y}{x}\right)$
$x\,dy - y\,dx$	$\frac{1}{x^2 + y^2}$	$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = \frac{\left(\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2}\right)}{\left(\frac{x^2 + y^2}{x^2}\right)}$ $= \frac{d\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ $= d\left[\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right]$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வுகாண்க :

$$x\,dy - y\,dx - (1 - x^2)\,dx = 0$$

இங்கு $(1 - x^2)\,dx$ பொருத்தமான வகையீடாக இருக்கிறது. $xdy - ydx$-க்கு ஒரு தொகையீட்டுக் காரணி தேவை. அது $\dfrac{1}{x^2}$ என்று உடனே தெரிகிறது. மேலும் இது மூன்ருவது உறுப்பைத் தொகையிடவும் உதவியாக இருக்கும்.

ஆகவே $\dfrac{1}{x^2}$ என்ற தொகையீட்டுக் காரணியால் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டைப் பெருக்கியபின்,

$$\frac{xby - ydx}{x^2} - \frac{(1 - x^2)}{x^2}\,dx = 0$$

அதாவது $$d\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx = 0$$

தொகையிட்டால்,

$$\frac{y}{x} - \int \left(\frac{1}{x^2} - 1\right)dx = c$$

$$\frac{y}{x} + \frac{1}{x} + x = c$$

அல்லது $y + 1 + x^2 = cx$ என்பது தீர்வு.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$(5x^2 + 12xy - 3y^2)\,dx + (3x^2 - 2xy)\,dy = 0$ என்ற சமன்பாடுக்கு x^n ஒரு தொகையீட்டுக்காரணி என்ருல், அதன் தீர்வு காண்க. (B. E. '70, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு,

$$(5x^2+12xy-3y^2)\,dx + (3x^2-2xy)\,dy = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

இதற்கு x^n தொகையீட்டுக் காரணி.

$\therefore$ (1) ஐ x^n ஆல் பெருக்கினுல், கிடைப்பது

$$(5x^{n+2} + 12x^{n+1}y - 3y^2x^n)\,dx + (3x^{n+2} - 2x^{n+1}y)\,d_y = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

இப்போது (2) ஒரு பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

$$M = 5x^{n+2} + 12x^{n+1}y - 3y^2 x^n$$

$$N = 3x^{n+2} - 2x^{n+1}y$$ என்றால்

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12x^{n+1} - 6y\, x^n$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 3\,(n+2)\,x^{n+1} - 2y\,(n+1)\,x^n$$

பொருத்தமான சமன்பாட்டில் $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ என்ற நிபந்தனையுண்டு.

$$\therefore \quad 12x^{n+1} - 6y\, x^n = 3\,(n+2)\,x^{n+1} - 2y\,(n+1)\,x^n$$

இருபக்கங்களையும் ஒப்பிட்டுப்பார்த்தால்,

$$3\,(n+2) = 12, \quad 2\,(n+1) = 6$$

அதாவது $n+2=4$, $n+1=3$ என்று கிடைக்கிறது.

இவைகளைத் தீர்க்க, $n = 2$.

ஆகவே, x^2 ஒரு தொகையீட்டுக் காரணி

$n = 2$ என்று (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$(5x^4 + 12x^3y - 3x^2y^2)\,dx + (3x^4 - 2x^3y)\,dy = 0 \quad \ldots (3)$$

இது பொருத்தமான சமன்பாடாகும்.

§ 14-ல் கூறிய செய்முறைப்படி,

$$\int\limits_{y \text{ மாறிலி}} M\,dx = \int\limits_{y \text{ மாறிலி}} (5x^4 + 12x^3y - 3x^2y^2)\,dx$$

$$= x^5 + 3x^4y - x^3y^2$$

N-ல் x இல்லாத உறுப்பொன்றும் கிடையாது.

$\therefore \quad x^5 + 3x^4y - x^3y^2 = c$ என்பது தீர்வு.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$(y^2 - x^2y)\,dx + x^3\,dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு $x^m y^n$ ஒரு தொகையீட்டுக் காரணி என்றால், அதன் தீர்வு காண்க.

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை $x^m y^n$ ஆல் பெருக்கக் கிடைப்பது,

$$(x^m y^{n+2} - x^{m+2}y^{n+1})\,dx + x^{m+3}y^n\,dy = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

இது பொருத்தமான சமன்பாடாகும்.

$M = x^m y^{n+2} - x^{m+2} y^{n+1}, \quad N = x^{m+3} y^n$ என்ருல்,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = (n+2)\, x^m y^{n+1} - (n+1)\, x^{m+2} y^n$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = (m+3)\, x^{m+2} y^n$$

$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ என்ற நிபந்தனையிருப்பதால்,

$$(n+2)\, x^m y^{n+1} - (n+1)\, x^{m+2} y^n = (m+3)\, x^{m+2} y^n$$

$x^m y^n$ ஆல் வகுத்தால்,

$$(n+2)\, y - (n+1)\, x^2 = (m+3)\, x^2$$

அல்லது $(m+n+4)\, x^2 - (n+2)\, y \equiv 0$.

இது ஒரு சர்வசமம்.

$$\therefore \quad m + n + 4 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$n + 2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இவைகளிலிருந்து $n = -2, \quad m = -2$ என்று கிடைக்கிறது.

$\therefore \quad x^{-2} y^{-2} = \frac{1}{x^2 y^2}$ ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

m, n மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$(x^{-2} - y^{-1})\, dx + xy^{-2}\, dy = 0$$

$$\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{y}\right) dx + \frac{x}{y^2}\, dy = 0$$

$$\frac{1}{x^2}\, dx - \left(\frac{1}{y}\, dx - \frac{x}{y^2}\, dy\right) = 0$$

$$\frac{1}{x^2}\, dx - \frac{(ydx - xdy)}{y^2} = 0$$

$$\frac{1}{x^2}\, dx - d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

தொகையிட்டால்,

$$-\frac{1}{x} - \frac{x}{y} = c$$

அல்லது $cxy + x^2 + y = 0$ என்பது தீர்வாகும்.

பயிற்சிகள் 8

தீர்வு காண்க : (1 லிருந்து 16 வரை)

1. $ydx - xdy - 3x^2y^2 e^{x^3} dx = 0$
(B. E. '66, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $(x^4e^x - 2m\, xy^2)\, dx + 2m \cdot x^2y\, dy = 0$
(B. E. '51, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்;
B. E. '54, அண்ணாமலைப்பல்கலைக்கழகம்)

3. $(x^2 - yx^2)\dfrac{dy}{dx} + (y^2 + x^2y^2) = 0$

4. $xdy - ydx = (x^2 + y^2)(dx + dy)$

5. $(y + x^3y^2)\, dx + xdy = 0$

6. $(y + y^2 \cos x)\, dx - (x - y^3)\, dy = 0$

7. $x\dfrac{dy}{dx} = x^2y^2 - y$

8. $xdy - (y + \log x)\, dx = 0$

9. $(y - 2x^3)\, dx - x(1 - xy)\, dy = 0$

10. $(y - x^2)\, dx + (x^2 \cot y - x)\, dy = 0$

11. $xdx + ydy = \dfrac{a^2(xdy - ydx)}{x^2 + y^2}$

12. $y(2xy + e^x)\, dx - e^x\, dy = 0$
(B. E. '52, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

13. $(1 + xy)\, ydx + (1 - xy)\, x\,dy = 0$

14. $(y^2e^{xy^2} + 4x^3)\, dx + (2xye^{xy^2} - 3y^2)\, dy = 0$

15. $(xe^{xy} + 2y)\dfrac{dy}{dx} + ye^{xy} = 0$
(B. E. '73, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

16. $ydy + \dfrac{ydx - xdy}{x^2} = 0$
(B. E. '72, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

17. $(2x - y)\,dx + (2y + x)\,dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு $\frac{1}{x^2 + y^2}$ ஒரு தொகையீட்டுக் காரணி என்று காட்டு. அப்படியானல் தீர்வு யாது? (B. E. '64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

18. $xdx + ydy + 4y^3 (x^2 + y^2)\,dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு $\frac{1}{x^2 + y^2}$ தொகையீட்டுக் காரணி என்ருல், சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க. (B. E. '65, 72, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

19. $(3xy - 2ay^2)\,dx + (x^2 - 2axy)\,dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு x^n என்ற வகையில் ஒரு தொகையீட்டு காரணி இருந்தால், அதன் தீர்வு யாது?

(B. E. '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

20. $(2y - 3xy^2)\,dx - x\,dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு $x^m\,y^n$ என்ற வகையில் ஒரு தொகையீட்டுக் காரணி இருந்தால், அதன் தீர்வு யாது?

21. $(x \cos y - y \sin y)\,dy + (x \sin y + y \cos y)\,dx = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு x மட்டிலும் அடங்கிய ஒரு சார்பு, தொகைக் காரணியாக இருக்கிறது. தொகைக் காரணியைக் கண்டுபிடித்து, சமன்பாட்டின் தீர்வை காண்க.

(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

[குறிப்பு : தொகைக் காரணியை $f(x)$ என்று கொள்ளவும்]

22. $x^4 e^x - 2m\,xy^2)\,dx + 2m\,x^2 y\,dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு $f(x)$ என்ற x மட்டிலும் அடங்கிய ஒரு சார்பு, தொகைக் காரணியாக இருக்கிறது. $f(x)$-ன் அமைப்பைக் கண்டுபிடித்து சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்க.

23. $y \sec^2 x\,dx + \left[3 \tan x - \left(\frac{\sec y}{y}\right)^2\right] dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு x^n என்ற வகையில் ஒரு தொகையீட்டுக் காரணி இருந்தால், n-ன் மதிப்பு யாது? சமன்பாட்டின் தீர்வையும் காண்க.

§ 16. தொகையீட்டுக் காரணிகள் கண்டுபிடிக்க சில விதிகள்

$Mdx + Ndy = 0$ பொருத்தமற்ற தாயிருந்தால், சில நிலைகளில் தொகையீட்டுக் காரணிகள் கண்டுபிடிக்க இயலும். அவைகளை இப்போது கவனிப்போம்.

விதி I. $Mx + Ny \neq 0$ என்றும், $Mdx + Ndy = 0$ என்ற சமன்பாடு சமபடித்தனதாகவுமிருந்தால், அப்போது $\frac{1}{Mx + Ny}$ ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

நிருபணம் :

$$Mdx + Ndy \equiv \frac{1}{2}\left[(Mx + Ny)\left(\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right) + (Mx - Ny)\left(\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right)\right]$$

$$\equiv \frac{1}{2}\left[(Mx + Ny)\, d \log (xy) + (Mx - Ny)\, d\left(\log \frac{x}{x}\right)\right] \quad \ldots \quad (1)$$

$$\therefore \frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{1}{2}\, d \log (xy) + \frac{1}{2}\, \frac{Mx - Ny}{Mx + Ny}\, d \log \left(\frac{x}{y}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$Mdx + Ndy = 0$ சமபடித்தானதால்,

$\frac{Mx - Ny}{Mx + Ny}$ என்ற கோவையும் சமபடித்தனதாக இருக்கும்.

$\therefore \frac{Mx - Ny}{Mx + Ny} = f\left(\frac{x}{y}\right)$ என்று வைத்துக் கொள்ளலாம்.

$\therefore$ (2) லிருந்து,

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = \frac{1}{2}\, d \log (xy) + \frac{1}{2}\, f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot d \log \left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, d \log (xy) + \frac{1}{2}\, f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)}\, d\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\, d \log (xy) + F\left(\frac{x}{y}\right) \cdot d\left(\frac{x}{y}\right) \ldots (3)$$

வலப்பக்கத்தில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் நிறைவகையீடாக உள்ளது.

$\therefore \frac{1}{Mx + Ny}$ ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

அப்போது $Mdx + Ndy = 0$ என்ற சமன்பாடு

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

∴ (8)-லிருந்து

$$\frac{1}{2} d \log (xy) + F\left(\frac{x}{y}\right) d\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

தொகையிட்டால்,

$$\frac{1}{2} \log (xy) + \int F\left(\frac{x}{y}\right) d\left(\frac{x}{y}\right) = c$$

அல்லது $\frac{1}{2} \log (xy) + \phi\left(\frac{x}{y}\right) = c$ என்பது தீர்வாகும்.

குறிப்பு (1) : $Mx + Ny = 0$ என்றால்,

$$Mx = -Ny \quad \therefore \quad \frac{M}{N} = -\frac{y}{x}$$

$Mdx + Ndy = 0$ என்பதிலிருந்து $\frac{M}{N} = -\frac{dy}{dx}$

∴ சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ என்றாகும்.

அதாவது $\frac{dx}{x} = \frac{dv}{y}$

தொகையிட்டால், $\log x = \log y + \log c = \log cy$

$x = cy$ என்பது தீர்வு.

குறிப்பு 2 : $Mdx + Ndy = 0$ சமபடித்தானதாக இருந்தால், தொகையீட்டுக் காரணி கண்டுபிடித்து தீர்வு காண்பதைவிட, $y = vx$ என்று பிரதியிட்டு § 9-ல் சொல்லியபடி, தீர்வு காண்பது சாலச் சிறந்தது

விதி II : $Mx - Ny \neq 0$ என்றும், $Mdx + Ndy = 0$ என்ற சமன்பாடு $f_1(xy) \cdot ydx + f_2(xy) \cdot xdy = 0$ என்ற அமைப்பிலுமிருந்தால், அப்போது $\frac{1}{Mx - Ny}$ ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

நிருபணம் :

விதி I-ன் நிருபணத்தில் (1) என்ற சர்வசமத்திலிருந்து, $Mx - Ny$ ஆல் வகுக்கக் கிடைப்பது,

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx - Ny} = \frac{1}{2}\left[\frac{Mx + Ny}{Mx - Ny}\, d \log (xy) + d\left(\log \frac{x}{y}\right)\right] \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

இப்போது $M = f_1 (xy) \cdot y$, $N = f_2 (xy) \cdot x$ என்பதால்

$$\frac{Mx + Ny}{Mx - Ny} = \frac{f_1 (xy) \cdot xy + f_2 (xy) \cdot xy}{f_1 (xy) \cdot xy - f_2 (xy) \cdot xy}$$

$$= \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} = f(xy) \text{ எனலாம்.}$$

$\therefore$ (4)-லிருந்து

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx - Ny} = \frac{1}{2}\left[f (xy)\, d \log (xy) + d\left(\log \frac{x}{y}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{f(xy)}{xy}\, d (xy) + d\left(\log \frac{x}{y}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[F (xy)\, d (xy) + d\left(\log \frac{x}{y}\right)\right] \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

வலப்பக்கத்தில் ஒவ்வொரு உறுப்பும் நிறை வகையீடாக உள்ளது.

$\therefore \quad \dfrac{1}{Mx - Ny}$ ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

அப்போது $Mdx + Ndy = 0$ என்ற சமன்பாடு

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx - Ny} = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

$\therefore$ (5)-லிருந்து $F (xy)\, d (xy) + d\left(\log \dfrac{x}{y}\right) = 0$

தொகையிட்டால்,

$$\int F (xy)\, d (xy) + \log \frac{x}{y} = c \text{ என்பது தீர்வாகும்.}$$

குறிப்பு 1 : $Mx - Ny = 0$ என்றால்,

$$Mx = Ny \qquad \therefore \quad \frac{M}{N} = \frac{y}{x}$$

$Mdx + Ndy = 0$-லிருந்து $\frac{M}{N} = -\frac{dy}{dx}$

$\therefore$ சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$ என்றாகும்.

அதாவது $\frac{dx}{x} = -\frac{dy}{y}$

தொகையிட்டால், $\log x = -\log y + \log c = \log \frac{c}{y}$

$\therefore \quad x = \frac{c}{y}$ அல்லது $xy = c$ தீர்வாகும்.

குறிப்பு 2 : $f_1(xy) \cdot ydx + f_2(xy) \cdot xdy = 0$ என்ற சமன்பாட்டை $xy = v$ என்று பிரதியிட்டும் தீர்வு காணலாம். (§ 8ஆம் பக்கம் பார்க்கவும்.)

விதி III : $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ என்றமைந்தால், (அதாவது x-ல் மட்டிலுமுள்ள சார்பானால்) அப்போது $e^{\int f(x)\,dx}$ ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

நிரூபணம் :

$\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ என்று இருந்தால்

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} + N f(x) \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

$Mdx + Ndy = 0$ ஐ $e^{\int f(x)\,dx}$ ஆல் பெருக்க,

$$M \cdot e^{\int f(x)\,dx}\,dx + N e^{\int f(x)\,dx}\,dy = 0 \quad \ldots \quad (7)$$

இதை $M_1\,dx = N_1\,dy = 0$ என்போம்.

இங்கு $M_1 = Me^{\int f(x)\,dx}$, $N_1 = Ne^{\int f(x)\,dx}$

$$\frac{\partial M_1}{\partial y} = e^{\int f(x)\,dx} \cdot \frac{\partial M}{\partial y} \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = Ne^{\int f(x)\,dx} f(x) + e^{\int f(x)\,dx} \frac{\partial N}{\partial x}$$

$$= e^{\int f(x)\,dx} \left[N f(x) + \frac{\partial N}{\partial x} \right]$$

$$= e^{\int f(x)\,dx} \frac{\partial M}{\partial y}$$ [(6) ஐப் பயன்படுத்தி]

$$= \frac{\partial M_1}{\partial y}$$ [(8)-லிருந்து]

∴ (7) ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடு.

ஆகவே $e^{\int f(x)\,dx}$ ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

விதி IV : $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = \phi(y)$ என்றமைந்தால்,

(அதாவது y-ல் மட்டிலுமுள்ள சார்பானால்) அப்போது $e^{-\int \phi(y)dy}$ ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

இந்த விதியின் நிரூபணத்தை விதி III-ல் கூறியவாறு செய்யலாம். அது மாணவர்களுக்கு ஒரு பயிற்சியாக ஒதுக்கப்படுகிறது.

விதி V : $Mdx + Ndy = 0$ என்ற சமன்பாடு

$$x^{\alpha} y^{\beta} (my\,dx + nx\,dy) + x^{\alpha_1} y^{\beta_1} (m_1 y\,dx + n_1 x\,dy) = 0$$

என்ற அமைப்பிலிருந்தால், அதற்கு ஒரு தொகையீட்டுக் காரணி பின் வருமாறு காணலாம்.

$x^{\alpha} y^{\beta} (my dx + nx dy)$ ஐ $x^{km - \alpha - 1} y^{kn - \beta - 1}$ என்பதால் பெருக்கக் கிடைப்பது.

$$mx^{\alpha + km - \alpha - 1} y^{\beta + 1 + kn - \beta - 1} dx + nx^{\alpha + 1 + km - \alpha - 1} y^{\beta + kn - \beta - 1} dy$$

அதாவது, $mx^{km - 1} y^{kn} dx + nx^{km} y^{kn - 1} dy$

இதை $my^{kn}\, d\left(\dfrac{x^{km}}{km}\right) + nx^{km}\, d\left(\dfrac{y^{km}}{kn}\right)$

அல்லது $\frac{1}{k}\left[y^{kn}\ d(x^{km}) + x^{km}\ d(y^{kn}) \right]$

அல்லது $\frac{1}{k}\ d(x^{km}\ y^{kn})$ என்று எழுதலாம்.

இவ்வாறே, சமன்பாட்டின் இரண்டாவது பகுதியிலுள்ள

$x^{\alpha_1}\ y^{\beta_1}(m_1 y dx + n_1 x\, dy)$ ஐ

$x^{k_1 m_1 - \alpha_1 - 1}\ y^{k_1 n_1 - \beta_1 - 1}$ என்பதால்,

பெருக்கக் கிடைப்பது $\frac{1}{k_1}\ d(x^{k_1 m_1}\ y^{k_1 n_1})$.

ஆகவே, இரு பகுதிகளும் தனித்தனியே ஒரு நிறை வகையீடாக மாறுகின்றன, ஆனால் சமன்பாடு முழுவதற்கும் ஒரே பொதுவான தொகையீட்டுக் காரணி கண்டுபிடிக்கவேண்டும். இதற்கு நிபந்தனைகள் பின்வருமாறு :

$$\left.\begin{aligned} km - \alpha - 1 &= k_1 m_1 - \alpha_1 - 1 \\ kn - \beta - 1 &= k_1 n_1 - \beta_1 - 1. \end{aligned}\right\}$$

இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளில் k, k_1 தவிர மற்றவை கொடுத்துள்ள மாறிலிகள். ஆகவே, இவைகளைத் தீர்த்து k, k_1-யின் மதிப்புகளைப் பெற்று, கொடுத்துள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டுக்கு ஒரு தொகையீட்டுக் காரணியைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

மேற்கண்ட சமன்பாடு, தனித்தனித் தொகையீட்டுக் காரணியால் பெருக்கப்பட்டால்,

$$\frac{1}{k}\ d(x^{km}\ y^{kn}) + \frac{1}{k_1}\ d(x^{k_1 m_1}\ y^{k_1 n_1}) = 0$$

என்றாகும்.

இதிலிருந்து தொகையிட்டால்,

$$\frac{1}{k} \cdot x^{km}\ y^{kn} + \frac{1}{k_1}\ x^{k_1 m_1}\ y^{k_1 n_1} = c$$ என்பது

தீர்வாகும்.

மேற்கண்ட விதிகள் பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளால் நன்கு விளங்கும்.

எடுத்துகாட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வுகாண்க :

$$(x^2y - 2xy^2)\,dx - (x^3 - 3x^2y)\,dy = 0.$$

(B. E. '71. மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ;
B. E. '63, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

சமன்பாட்டின் உறுப்புகள் சமபடித்தானவை.

∴ § 16-ல் விதி I பிரகாரம்

$$\frac{1}{x(x^2y-2xy^2)-y(x^3-3x^2y)}$$

$$= \frac{1}{x^2y^2}$$ என்பது தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

ஆகவே சமன்பாட்டை $\frac{1}{x^2y^2}$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{x^2y-2xy^2}{x^2y^2}\,dx - \frac{(x^3-3x^2y)}{x^2y^2}\,dy = 0$$

$$\frac{1}{y}\,dx - \frac{2}{x}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy + \frac{3}{y}\,dy = 0$$

$$\frac{1}{y}\,dx - \frac{x}{y^2}\,dy - \frac{2}{x}\,dx + \frac{3}{y}\,dy = 0$$

$$\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2} - \frac{2}{x}\,dx + \frac{3}{y}\,dy = 0$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{2}{x}\,dx + \frac{3}{y}\,dy = 0$$

தொகையிட்டால்,

$$\frac{x}{y} - 2\log x + 3\log y = c$$ என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$y(xy + 2x^2y^2)\,dx + x(xy - x^2y^2)\,dy = 0$$

இங்கு §16-ல் விதி *II* பிரகாரம்

$$\frac{1}{xy(xy+2x^2y^2)-xy(xy-x^2y^2)}$$

$$=\frac{1}{3x^3\,yx^3}$$ என்பது தொகையீட்டுக் காரணியாகும்.

$\frac{1}{3}$ ஐ நீக்கி, சமன்பாட்டை $\frac{1}{x^3y^3}$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{y(xy+2x^2y^2)}{x^3y^3}dx+\frac{x(xy-x^2y^2)}{x^3y^3}dy=0$$

$$\frac{1}{x^2y}dx+\frac{2}{x}dx+\frac{1}{xy^2}dy-\frac{1}{y}dy=0$$

$$\frac{1}{x^2y}dx+\frac{1}{xy^2}dy+\frac{2}{x}dx-\frac{1}{y}dy=0$$

$$\frac{1}{x^2y^2}(y\,dx+x\,dy)+\frac{2}{x}dx-\frac{1}{y}dy=0$$

$$\frac{d(xy)}{x^2y^2}+\frac{2}{x}dx-\frac{1}{y}dy=0$$

தொகையிட்டால்,

$$-\frac{1}{xy}+2\log x-\log y=c$$ என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்வு காண்க :

$$(x\sec^2y-x^2\cos y)\,dy=(\tan y-3x^4)\,dx$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு,

$$(3x^4-\tan y)\,dx+(x\sec^2y-x^2\cos y)\,dy=0$$

இங்கு $M=3x^4-\tan y$, $N=x\sec^2y-x^2\cos y$ என்றால்,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\sec^2y,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\sec^2y-2x\cos y.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-2\sec^2y+2x\cos y$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = -\frac{2\sec^2 y + 2x\cos y}{x\sec^2 y - x^2\cos y}$$

$$= -\frac{2(\sec^2 y - x\cos y)}{x(\sec^2 y - x\cos y)}$$

$$= -\frac{2}{x} = f(x).$$

∴ § 16-ல் விதி III பிரகாரம்

$$e^{\int f(x)\,dx} = e^{\int -\frac{2}{x}\,dx} = e^{-2\log x} = e^{\log\left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{x^2}$$ என்பது தொகையீட்டுக் காரணி.

சமன்பாட்டை $\frac{1}{x^2}$ ஆல் பெருக்க,

$$\left(3x^2 - \frac{\tan y}{x^2}\right)dx + \left(\frac{\sec^2 y}{x} - \cos y\right)dy = 0$$

$$3x^2dx - \cos y\,dy + \frac{\sec^2 y}{x}\,dy - \frac{\tan y}{x^2}\,dx = 0$$

$$3x^2dx - \cos y\,dy + \frac{x\sec^2 y\,dy - \tan y\,dx}{x^2} = 0$$

$$d(x^3) - d(\sin y) + \frac{x\,d(\tan y) - \tan y\,dx}{x^2} = 0$$

$$d(x^3) - d(\sin y) + d\left(\frac{\tan y}{x}\right) = 0$$

தொகையிட்டால்,

$x^3 - \sin y + \frac{\tan y}{x} = c$ என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 4 :

தீர்வு காண்க :

$$\left(\frac{y}{x}\sec y - \tan y\right)dx - (x - \sec y\,\log x)\,dy = 0.$$

இங்கு $M = \frac{y}{x}\sec y - \tan y,\quad N = -x + \sec y\,\log x$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{1}{x}(y \sec y \tan y + \sec y) - \sec^2 y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -1 + \frac{\sec y}{x}$$

$$\therefore \quad \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{y}{x} \sec y \tan y - \sec^2 y + 1$$

$$= \frac{y}{x} \sec y \tan y - \tan^2 y$$

$$= \tan y \left(\frac{y}{x} \sec y - \tan y \right)$$

$$\therefore \quad \frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = \frac{\tan y \left(\dfrac{y}{x} \sec y - \tan y \right)}{\dfrac{y}{x} \sec y - \tan y}$$

$$= \tan y = \phi(y)$$

$\therefore$ §16-ல் விதி IV பிரகாரம்

$$e^{-\int \phi(y)\, dy} = e^{-\int \tan y\, dy} = e^{\log \cos y} = \cos y$$

என்பது தொகையீட்டுக் காரணி.

சமன்பாட்டை $\cos y$ஆல் பெருக்க,

$$\left(\frac{y}{x} - \sin y \right) dx - (x \cos y - \log x)\, dy = 0$$

$$\frac{x}{y}\, dx + \log x\, dy - \sin y\, dx - x \cos dy = 0$$

$$[y d(\log x) + \log x\, dy] - [\sin y\, dx + x\, d(\sin y)] = 0$$

$$d(y \log x) - d(x \sin y) = 0$$

தொகையிட்டால்,

$y \log x - x \sin y = c$ என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 5 :

தீர்வு காண்க :

$$y(xy + 2x^2 y^2)\, dx + x(xy - x^2 y^2)\, dy = 0$$

சமன்பாட்டை மாற்றி பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$xy(ydx + xdy) + x^2 y^2 (2\, ydx - x\, dy) = 0 \quad \dots \quad (1)$$

முதல் பகுதியை $x^{\alpha} y^{\beta} (my\,dx + nx\,dy)$ என்று குறிப்பிட்டால்,

$$\alpha = 1,\ \beta = 1,\ m = 1,\ n = 1.$$

ஆகவே §16-ல் விதி V பிரகாரம் தொகையீட்டுக் காரணி,

$$= x^{km-\alpha-1} . y^{kn-\beta-1}$$

$$= x^{k-2} . y^{k-2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

இரண்டாவது பகுதியை $x^{\alpha_1} y^{\beta_1} (m_1 y\,dx + n_1 x\,dy)$ என்று குறிப்பிட்டால்,

$$\alpha_1 = 2,\ \beta_1 = 2,\ M_1 = 2,\ n_1 = -1.$$

∴ இதற்குத் தகுந்த தொகையீட்டுக் காரணி

$$= x^{k_1 m_1 - \alpha_1 - 1} . y^{k_1 n_1 - \beta_1 - 1}$$

$$= x^{2k_1 - 3}\ y^{-k_1 - 3} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

இரண்டு காரணிகளும் ஒன்ருக இருப்பதற்கு,

$$k - 2 = 2k_1 - 3 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$k - 2 = -k_1 - 3 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

என்ற நிபந்தனைகள் வேண்டும்.

$$(4) - (5);\quad 3k_1 = 0 \qquad \therefore\ k_1 = 0.$$

(4)-ல் $k_1 = 0$ என்று பிரதியிட்டால், $k = 2 - 3 = -1$

∴ (2)-லிருந்து, பொதுத் தொகைக் காரணி

$$= x^{-3} y^{-3} = \frac{1}{x^3 y^3}$$

சமன்பாட்டை $\frac{1}{x^3 y^3}$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{1}{x^2 y^2} (ydx + xdy) + \frac{1}{xy} (2y\,dx - x\,dy) = 0$$

$$\frac{1}{x^2 y^2} d(xy) + \frac{2}{x} dx - \frac{1}{y} dy = 0$$

தொகையிட்டால்,

$$-\frac{1}{xy} + 2\log x - \log y = c$$ என்பது தீர்வாகும்.

பயிற்சிகள் 9

தொகைக் காரணிகளைக் கண்டுபிடித்துக் கீழ்வரும் சமன்பாடு களின் தீர்வு காண்க :

1. $(y^3 - 2yx^2)\,dx + (2xy^2 - x^3)\,dy = 0$
2. $(x^3y^3 + x^2y^2 + xy + 1)\,ydx + (x^3y^3 - x^2y^2 - xy + 1)\,xdy = 0$
3. $y(xy + 1)\,dx + x(1 + xy + x^2y^2)\,dy = 0$
4. $(x^2 + y^2 + 1)\,dx - 2xy\,dy = 0$
5. $\left(xy^2 - e^{\frac{1}{x^3}}\right)dx - x^2y\,dy = 0$
(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)
6. $y(2xy + e^x)\,dx - e^x\,dy = 0$
7. $x^2(ydx + 2x\,dy) + y^3(ydx + 4x\,dy) = 0$
8. $(2x^2y - 3y^4)\,dx + (3x^3 + 2xy^3)\,dy = 0$
9. $(x^2 + y^2 + 2x)\,dx + 2y\,dy = 0$
10. $x(4y\,dx + 2x\,dy) + y^3(3y\,dx + 5x\,dy) = 0$
11. $(x^2y - x)\frac{dy}{dx} = xy^2 + y$
(B. E. '71, '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

§ 17. அமைப்பு V: நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (Linear Differential Equations):

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற அமைப்புடைய ஒரு முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன் பாட்டில், P, Q இந்த இரண்டும் x ஐ மட்டிலும் அடங்கிய சார்பு களாகவோ அல்லது மாறிகளாகவோ இருந்தால் (1) y-ல் நேரிய சமன்பாடு எனப்படும். x, y ஒன்றுக்கொன்று மாறிக்கொண்டு

(1) அமைப்புள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாடு x-ல் நேரிய சமன்பாடாகும். ஆகவே முதல் வரிசை நேரிய சமன்பாட்டில், சார்புடைய மாறியும் அதனுடைய வகைக்கெழுவும் முதல் படியிலிருக்கும். இவைகள் ஒன்றையொன்று பெருக்கலில் இருக்காது.

(1) உடைய தீர்வு காண்பதற்கு $e^{\int Pdx}$ என்ற காரணியால் பெருக்குவோம்.

$$\therefore \quad e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx}+Py\right)=Q\,e^{\int Pdx} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இப்போது,

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right)=y\,\frac{d}{dx}\left(e^{\int Pdx}\right)+e^{P\int dx}\frac{dy}{dx}$$

$$=y\,e^{\int Pdx}\,P+e^{\int Pdx}\,\frac{dy}{dx}$$

$$=e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx}+Py\right)$$

= (2)-ன் இடப்புறம்.

$\therefore$ (2) ஐக் கீழ்க்கண்டபடி எழுதலாம் :

$$\frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right)=Q\,e^{\int Pdx} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

தொகையிட்டால்,

$$y\,e^{\int Pdx}=c+\int Q\,e^{\int Pdx}\,dx \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

என்பது தீர்வாகும்.

குறிப்பு 1 : சமன்பாடு (1) ஐ $e^{\int Pdx}$ ஆல் பெருக்கினுல், அது (3) ஆவதில் உள்ள ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடாக மாறுகிறது. அதற்குப்பிறகு தொகையிடல் மூலம் தீர்வு காண இயலுகிறது. ஆகவே $e^{\int Pdx}$ ஐ (1) உடைய தொகையீட்டுக்காரணியெனலாம்.

குறிப்பு 2 : $\frac{dy}{dx}+Py=Q$ என்ற சமன்பாடு, தொகையீட்டுக்காரணி $e^{\int Pdx}$ ஆல் பெருக்கப்பட்டால், அதனுடைய புதிய அமைப்பு $\frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right)=Q\cdot e^{\int Pdx}$ என்ருகும்.

அதாவது $\frac{d}{dx}[y \times$ தொ. கா.$] = Q \times$ தொ. கா.

(இங்கு தொ. கா. என்பது தொகையீட்டுக் காரணி)

மேற்கண்ட முடிவை நினைவில் கொள்வது மிக்க நல்லது.

குறிப்பு 3 : $e^{\log f(x)} = f(x)$, $e^{m \log f(x)} = [f(x)]^m$ என்ற முடிவுகள் நேரிய சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் கணக்குகளில், பெரிதும் பயன்படும்.

குறிப்பு 4 : நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் நியம வடிவம் (standard form) $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ ஆகும். இதில் $\frac{dy}{dx}$ உடைய குணகம் 1. சில நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளில் $\frac{dy}{dx}$ உடைய குணகம் 1 அல்லாது வேருக இருந்தால், முதலில் அவைகளை நியம வடிவத்துக்குக் கொண்டு வர வேண்டும். பிறகு மேற்கண்ட முறைப்படி தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$\frac{dy}{dx} + y \cot x = 2 \cos x$ (B. E. '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

இது நியம வடிவத்திலுள்ள நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

$$P = \cot x, \quad Q = 2 \cos x$$

$$\int P dx = \int \cot x \, dx = \log \sin x$$

$\therefore$ தொகைக் காரணி $= e^{\int P dx} = e^{\log \sin x} = \sin x$

சமன்பாட்டை இரு பக்கமும் $\sin x$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{d}{dx}(y \sin x) = 2 \cos x \sin x = \sin 2x$$

தொகையிட்டால்,

$$y \sin x = C + \int \sin 2x \, dx = C - \frac{\cos 2x}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\frac{dy}{dx} - 3y\cot x = \sin 2x$ என்ற சமன்பாட்டை, $x = \frac{\pi}{2}$ என்றால் $y = 2$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டுத் தீர்க்கவும். மேலும் $0 \le x \le \pi$ என்ற இடைவெளியில் y-ன் மீச்சிறு மதிப்பு $-\frac{2}{27}$ யென்று காட்டு.

$$\frac{dy}{dx} - 3y\cot x = \sin 2x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இங்கு $P = -3\cot x$.

$$\int P dx = \int -3\cot x\, dx = -3\log\sin x$$

$$= \log(\sin x)^{-3} = \log\left(\frac{1}{\sin^3 x}\right)$$

$$\therefore \text{ தொ. கா. } = e^{\int P dx} = e^{\log \frac{1}{\sin^3 x}} = \frac{1}{\sin^3 x}$$

(1) ஐ $\frac{1}{\sin^3 x}$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{d}{dx}\left(y \cdot \frac{1}{\sin^3 x}\right) = \sin 2x \cdot \frac{1}{\sin^3 x}$$

$$= \frac{2\sin x\cos x}{\sin^3 x} = \frac{2\cos x}{\sin^2 x}$$

தொகையிட்டால்,

$$\frac{y}{\sin^3 x} = c + \int \frac{2\cos x}{\sin^2 x}\, dx$$

$$= c + 2\int \frac{d(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$= c + 2 \times -\frac{1}{\sin x} = c - \frac{2}{\sin x}$$

$$\therefore \quad y = c\sin^3 x - 2\sin^2 x \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2)-ல் $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 2$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$2 = c \sin^3 \frac{\pi}{2} - 2 \sin^2 \frac{\pi}{2} = c - 2$$

$\therefore \quad c = 4$

$\therefore$ (2)-லிருந்து, $y = 4 \sin^3 x - 2 \sin^2 x$ ... (3)

y-ன் மீச்சிறு மதிப்பு காண, $\sin x = u$ என்று கொள்வோம்.

(3)-லிருந்து, $y = 4u^3 - 2u^2$ ... ... (4)

u ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$\frac{dy}{du} = 12u^2 - 4u \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$$\frac{d^2 y}{du^2} = 24u - 4 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

y மீச்சிறு மதிப்பை அடையும்போது,

$$\frac{dy}{du} = 0, \quad \frac{d^2 y}{du^2} = +.$$

$\therefore \quad 12u^2 - 4u = 0$

$4u(3u-1) = 0$

$u = 0$ அல்லது $u = \frac{1}{3}$.

$u = \frac{1}{3}$ என்றால், (6)-லிருந்து $\frac{d^2y}{du^2} = 24 \times \frac{1}{3} - 4 = 4 = +$

$\therefore$ $u = \frac{1}{3}$, y-ன் மீச்சிறு மதிப்பைத் தருகின்றது.

$\therefore$ (4)-லிருந்து, $(y)_{\text{மீச்சிறு}} = 4 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2$

$$= \frac{4}{27} - \frac{2}{9} = -\frac{2}{27}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்வு காண் :

$$(1 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 1$$

(B. E. '65, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

முதலில் சமன்பாட்டை நியம வடிவத்துக்குக் கொண்டு வர வேண்டும்.

$(1 - x^2)$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{dy}{dx} - \frac{x}{1 - x^2}y = \frac{1}{1 - x^2} \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இங்கு $P = -\dfrac{x}{1 - x^2}$.

$$\int P dx = -\int \frac{x}{1 - x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(1 - x^2)}{1 - x^2}$$

$$= \frac{1}{2}\log(1 - x^2) = \log\sqrt{1 - x^2}$$

$$\therefore \text{ தொ. கா. } = e^{\int P dx} = e^{\log\sqrt{1 - x^2}} = \sqrt{1 - x^2}$$

(1) ஐ $\sqrt{1 - x^2}$ ஆல் பெருக்கினால்,

$$\frac{d}{dx}(y\sqrt{1 - x^2}) = \sqrt{1 - x^2}\cdot\frac{1}{1 - x^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

தொகையிட்டால்,

$$y\sqrt{1 - x^2} = c + \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = c + \sin^{-1}x$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

தீர்வு காண்க :

$$5x^3 + (4x^2 - 2)y + x(x^2 - 1)\frac{dy}{dx} = 0$$

(B. E. '72, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு நியம வடிவத்தில்

$$\frac{dy}{dx} + \frac{4x^2 - 2}{x(x^2 - 1)}y = -\frac{5x^3}{x(x^2 - 1)} = -\frac{5x^2}{x^2 - 1} \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இங்கு $P = \dfrac{4x^2 - 2}{x(x^2 - 1)} = \dfrac{4x^2 - 2}{x(x-1)(x+1)}$

$\int Pdx$ காண, P ஐப் பகுதிப்பின்னங்களாகப் பிரித்துக் கொள்ளவேண்டும்.

$$\frac{4x^2 - 2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}$$

$$\therefore \quad 4x^2 - 2 = A(x-1)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-1)$$

இதில் முறையே $x = 0,\ 1,\ -1$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$-2 = A(-1)(1) = -A \qquad \therefore \quad A = 2$$

$$4 - 2 = B \times 1 \times 2 = 2B \qquad B = 1$$

$$4 - 2 = C(-1)(-2) = 2C \qquad C = 1$$

$$\therefore \quad P = \frac{4x^2 - 2}{x(x-1)(x+1)} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$\int Pdx = 2\int \frac{dx}{x} + \int \frac{d(x-1)}{x-1} + \int \frac{d(x+1)}{x-1}$$

$$= 2\log x + \log(x-1) + \log(x+1)$$

$$= \log[x^2(x-1)(x+1)]$$

$$\therefore \quad \text{தொ. கா.} = e^{\int Pdx} = e^{\log[x^2(x-1)(x+1)]}$$

$$= x^2(x-1)(x+1) = x^2(x^2-1)$$

(1) ஐ $x^2(x^2-1)$ ஆல் பெருக்கினல்,

$$\frac{d}{dx}[yx^2(x^2-1)] = -\frac{5x^2}{x^2-1} \cdot x^2(x^2-1) = -5x^4$$

$\therefore$ தொகையிட்டால்,

$$yx^2(x^2-1) = c - \int 5x^4\, dx = c - x^5$$

எடுத்துக்காட்டு 5 :

தீர்வு காண்க :

$$\cos^2 x \frac{dy}{dx} + y = \tan x$$

(B. E. '64, அண்ணுமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு நியம வடிவத்தில்,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{\cos^2 x} y = \frac{\tan x}{\cos^2 x} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இங்கு $P = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$

$$\int P dx = \int \sec^2 x \, dx = \tan x$$

$\therefore$ தொ. கா. $= e^{\int P dx} = e^{\tan x}$

(1) ஐ $e^{\tan x}$ ஆல் பெருக்கினால்,

$$\frac{d}{dx} (ye^{\tan x}) = \frac{\tan x}{\cos^2 x} \cdot e^{\tan x} = e^{\tan x} \cdot \tan x \cdot \sec^2 x$$

தொகையிட்டால்,

$$ye^{\tan x} = C + \int e^{\tan x} \tan x \sec^2 x \, dx \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

வலப் புறத்து நுண் தொகையைக் காண,

$\tan x = u$ என்று பிரதியிடுவோம்.

$\therefore \quad \sec^2 x \, dx = du$

$$\int e^{\tan x} \tan x \sec^2 x \, dx$$

$$= \int e^u \, u \, du$$

$$= \int u d(e^u)$$

$$= ue^u - \int e^u du$$

$$= ue^u - e^u = \tan x \, e^{\tan x} - e^{\tan x}$$

$\therefore$ (2)-லிருந்து

$$ye^{\tan x} = c + \tan x \cdot e^{\tan x} - e^{\tan x}$$

$$= c + e^{\tan x} (\tan x - 1)$$

பயிற்சிகள் 10

தீர்வுகாண்க :

1. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = \operatorname{cosec} x$

(B. E. '64, வெங்கடேசா பல்கலைக்கழகம்)

2. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = \sin 2x$

(B. E. '57, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

3. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = \cot x \cos x$

(B. E. '62, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

4. $\frac{dy}{dx} + y \cot x = 4x \operatorname{cosec} x$;

$x = \frac{\pi}{2}$ என்றபோது, $y = 0$ என்பதற்கிணங்க

5. $\frac{dy}{dx} + y \tan x = \cos^3 x$ (B. E. '48)

6. $\frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} \tan x = \cos x$

(B. E. '50, ஆந்திராப் பல்கலைக்கழகம்)

7. $\frac{dy}{dx} + ny \tan x = \sin x$

8. $\frac{dy}{dx} - y \tan x = \cos x$ (B. E. '49)

9. $\frac{dv}{dx} - y \tan x = e^{n} \sec x$

10. $2 \cos x \frac{dy}{dx} + 4y \sin x = \sin 2x$;

மேலும் $x = \frac{\pi}{3}$ என்றபோது $y = 0$ என்றால்,

y-ன் மீப்பெரு மதிப்பு $\frac{1}{8}$ என்று காட்டு.

(B. E' 65. சென்னைப் பல்கலைக்கழகம் ;
B. E. '52, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

11. $(1+x^3)\dfrac{dv}{dx} + 3x^2y = \sin^2 x$ (B. E. '58)

12. $\dfrac{dv}{dx} + \dfrac{3x^2}{5+x^3}\,y = \dfrac{\cos^2 x}{5+x^3}$ (B. E. '63)

13. $(x^2+1)\dfrac{dv}{dx} + 2xy = 4x^2$

14. $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} + 4xy = 4x^2$ (B. E. '64)

15. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2x}{1+x^2}\,y = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$; $x = 1,\ y = 0$
என்பதற்கிணங்க.

16. $(x^2+1)\dfrac{dy}{dx} + 4xy = \dfrac{1}{x^2+1}$ (B. E. '62)

17. $x\dfrac{dy}{dx} + y - \log x = 0$ (B. E. '57)

18. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x\log x} = \dfrac{\sin 2x}{\log x}$

19. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} = xe^x$

20. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x^2\cos^2 x$

21. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - ny = e^x(x+1)^{n+1}$

22. $x\cos x\dfrac{dy}{dx} + y(x\sin x + \cos x) = 1$
(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

23. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{xy}{1+x^2} = \dfrac{1}{x(1+x^2)}$

24. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx} + 2xy = x\sqrt{1-x^2}$; $x = 0,\ y = 0$
என்பதற்கிணங்க.

25. $(x^2-a^2)\dfrac{dv}{dx} + xy = (x+a)\sqrt{x^2-a^2}$

26. $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+xy=x$ (B. E. '59)

27. $x(x-1)\dfrac{dy}{dx}-(x-2)y=x^3(2x-1)$

28. $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+y=e^{\tan^{-1}x}$ (B. E. '52)

29. $\dfrac{dy}{dx}+y\cos x=\dfrac{1}{2}\sin 2x$ (B. E. '58)

30. $\dfrac{dy}{dx}+(y-1)\cos x=e^{-\sin x}\cot^2 x$

31. $\dfrac{dy}{dx}=2x(x^2-y+3)$ (B. E. '56)

32. $(1+x)\dfrac{dy}{dx}+(1-x)y=e^x$

33. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{1-2x}{x^2}y=1$

34. $\sqrt{a^2+x^2}\dfrac{dy}{dx}+y=\sqrt{a^2+x^2}-x$

35. $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx}+(1-x)^2y=xe^{-x}$

36. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{y}{(1-x^2)^{3/2}}=\dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$

37. $\operatorname{cosec} x\dfrac{dy}{dx}=y+\cos x$

38. $\dfrac{dy}{dx}+y\tanh x=\sinh 2x$

(B. E. '65, வெங்கடேசா பல்கலைக்கழகம்)

39. $x(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}+(2x^2-1)y=3x^3$

40. $(1-x^2)\dfrac{dy}{dx}+xy=x$

(B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

41. $(1 + x^2) \tan^{-1}x \cdot y' + y = x$; $x = -1, y = -1$ என்பதற்கிணங்க.

(B. E. '72, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

42. $xy'(x) + (1 + x) v = e^{-x}$

(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

43. $y' (x - \sin 2x = y \cot x$

(B. E. '70 சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

44. $x \dfrac{dy}{dx} + 2y = \sqrt{x}$

(B. E. '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

§18. அமைப்பு VI. நேரிய அமைப்புக்கு மாற்றக்கூடிய சமன்பாடுகள் (Equations reducible to the linear type):

A. பெர்னௌலி சமன்பாடுBernowli's equation)

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q\, y^n \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

என்ற அமைப்புடைய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டில் P, Q இரண்டும் x ஐ மட்டிலும் அடங்கிய சார்புகளாகவோ இருந்தால், அதற்கு பெர்னௌலி சமன்பாடென்று பெயர். சார்புடைய மாறியை மாற்றி (1) ஐ ஒரு நேரிய வகைக்கெழுவாகக் கொண்டு வரலாம்.

(1)-ன் இரு பக்கங்களையும் y^n ஆல் வகுக்க,

$$\frac{1}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{Py}{y^n} = Q$$

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + py^{1-n} = Q \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

$$y^{1-n} = v \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (3)$$

என்று பிரதியிடுவோம்.

இதனால் v, புதிய சார்புடை மாறியாகும்.

(3) ஐ x ஐப் பொறுத்து வகையிட்டால்,

$$(1-n)\, y^{1-n-1} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\therefore \quad y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{dv}{dx} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

(3), (4) இவைகளை (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{1}{1-n} \cdot \frac{dv}{dx} + Pv = Q$$

$$\frac{dv}{dx} + P(1-n)\, v = Q(1-n) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5)$$

(5), v-ல் ஒரு நேரிய வகைகெழுச் சமன்பாடு.

அதற்கு $e^{\int P(1-n)\,dx}$ ஒரு தொகையீட்டுக் காரணி.

(5)-ன் இரு பக்கங்களையும், $e^{\int P(1-n)\,dx}$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{d}{dx}\left[v e^{\int P(1-n)\,dx} \right] = Q(1-n)\; e^{\int P(1-n)\,dx} \quad \ldots (6)$$

தொகையிட்டால்,

$$v e^{\int P(1-n)\,dx} = c + \int Q(1-n)\, e^{\int P(1-n)\,dx}\, dx$$

இதில் v-க்கு பிரதியிட்டால்,

$$y^{1-n} \cdot e^{\int P(1-n)\,dx} = c$$

$$+ \int Q(1-n) \cdot e^{\int P(1-n)}\, dx$$ என்பது தீர்வாகும்.

B. நேரிய அமைப்புக்கு மாற்றக்கூடிய மற்றொருவித சமன்பாடு,

$f'(y) \frac{dy}{dx} + P f(y) = Q$ என்பது.

இதில் P, Q இரண்டும் x ஐ மட்டிலும் அடங்கிய சார்புகளாகவோ அல்லது மாறிலிகளாகவோ இருக்கலாம்.

மேற்கண்டதில் $f(y) = u$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$f'(y) \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \, .$$

ஆகவே சமன்பாடு, $\frac{du}{dx} + Pu = Q$ என்பது u-ல் ஒரு நேரிய சமன்பாடாக மாறும்.

இவ்வாறு நேரிய சமன்பாடாக மாற்றும் விதத்தை விளக்கக் கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகள் பயன்படும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$x\frac{dy}{dx}+y=x^3 y^6$ (B.E. '62, '70, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை x ஆல் வகுக்க,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^2 y^6 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

(1) ஐ y^6 ஆல் வகுக்க,

$$y^{-6}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} y^{-5} = x^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$y^{-5} = v \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

என்று பிரதியிடுவோம்.

$$\therefore \quad -5\, y^{-6} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$x^{-6}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{5} \cdot \frac{dv}{dx} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(3), (4) இவைகளை (2)-ல் பிரதியிட்டால், கிடைப்பது

$$-\frac{1}{5}\frac{dv}{dx} + \frac{1}{x} v = x^2$$

அதாவது $\frac{dv}{dx} - \frac{5}{x} v = -5x^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$

இது v-ல் நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

இங்கு $P = -\frac{5}{x}$.

$$\int P dx = \int -\frac{5}{x}\, dx = -5 \log x = \log\left(\frac{1}{x^5}\right)$$

$$\therefore \text{ தொ. கா.} = e^{\log\left(\frac{1}{x^5}\right)} = \frac{1}{x^5}$$

(5) ஐ $\frac{1}{x^5}$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{d}{dx}\left(v \cdot \frac{1}{x^5}\right) = -5x^2 \cdot \frac{1}{x^5} = -\frac{5}{x^3}$$

தொகையிட்டால்,

$$\frac{v}{x^5} = c - \int \frac{5}{x^3}\, dx = c + \frac{5}{2x^2}$$

$$\frac{y^{-5}}{x^5} = c + \frac{5}{2x^2}$$ என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வுகாண்க :

$$\sqrt{1-y^2}\, dx = (\sin^{-1} y - x)\, dy$$

(B. E. '54, ஆந்திராப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sin^{-1} y - 5}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\therefore \frac{dx}{dy} + \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\, x = \frac{\sin^{-1} y}{\sqrt{1-y^2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இது x-ல் நேரியதாக இருக்கிறது.

$$P = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\ ; \int P dy = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \sin^{-1} y$$

$$\therefore \text{ தொ. கா.} = e^{\int P dy} = e^{\sin^{-1} y}$$

(1) ஐ $e^{\sin^{-1} y}$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{d}{dy}\left(x e^{\sin^{-1} y}\right) = e^{\sin^{-1} y} \cdot \frac{\sin^{-1} y}{\sqrt{1-y^2}} \quad \ldots \quad (2)$$

தொகையிட்டால்,

$$xe^{\sin^{-1} y} = c + \int e^{\sin^{-1} y} \cdot \frac{\sin^{-1} y}{\sqrt{1-y^2}}\, dy$$

$$= c + \int e^{u} \cdot u\, du \left[\sin^{-1} y = u \text{ என்றால் } \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = du \right]$$

$$= c + \int u\, d(e^{u})$$

$$= c + ue^{u} - \int e^{u}\, du$$

$$= c + ue^{u} - e^{u}$$

$$= c + e^{\sin^{-1} y}(\sin^{-1} y - 1)$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{dy}{dx} - \frac{\tan y}{1+x} = (1+x)e^{x} \sec y$$

(B. E.'69, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

சமன்பாட்டை sec y ஆல் வகுக்க,

$$\frac{1}{\sec y}\frac{dy}{dx} - \frac{\tan y}{\sec y(1+x)} = (1+x)e^{x}$$

$$\cos y \frac{dy}{dx} - \frac{1}{1+x} \sin y = (1+x)e^{x} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\sin y = u \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்று பிரதியிடுவோம்.

$$\therefore \quad \cos y \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2), (3) இவற்றை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{1+x} u = (1+x)e^{x} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

இது u-ல் நேரியதாக இருக்கிறது.

$$P = -\frac{1}{1+x}, \quad \int P dx = \int -\frac{dx}{1+x} = -\log(1+x)$$
$$= \log\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

$$\therefore \quad \text{தொ. கா.} = e^{\log\left(\frac{1}{1+x}\right)} = \frac{1}{1+x}$$

(4) ஐ $\frac{1}{1+x}$ ஆல் பெருக்கினால்,

$$\frac{d}{dx}\left(u \cdot \frac{1}{1+x}\right) = \frac{(1+x)e^x}{1+x} = e^x \quad \ldots \quad (5)$$

தொகையிட்டால்,

$$\frac{u}{1+x} = c + \int e^x \, dx = c + e^x$$

$\frac{\sin y}{1+x} = c + e^x$ என்பது தீர்வாகும்.

பயிற்சிகள் 11

தீர்வு காண்க :

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{x}{1-x^2} y = 3xy^{\frac{1}{2}}$

(B. E. '63, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = x^2y^2$

(B. E. '51, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

3. $(1+x^2)\frac{dy}{dx} = xy - y^2$

(B. E. '51, ஆந்திராப் பல்கலைக்கழகம்)

4. $(1-x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 2xy^2$

(B. E. '62, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. $\frac{dy}{dx} + y\cos x = y^n \sin 2x$

(B. E. '54, ஆந்திராப் பல்கலைக்கழகம்)

6. $x \dfrac{dy}{dx} + y = y^2 \log x$

7. $\dfrac{dy}{dx} - y \tan x = \dfrac{\sin x \cos^2 x}{y^2}$

(B. E. 64', சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

8. $3 \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{2y}{x+1} = \dfrac{x^3}{y^3}$

(B. E. 66', சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

9. $2y^3 \dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y^4}{x} = e^x$

10. $\dfrac{dy}{dx} + y \tan x = y^2 \sin^2 x$

11. $(n-1) \dfrac{dy}{dx} - y \cos x = y^n (\sin 2x - \cos x)$

12. $\dfrac{dy}{dx} + xy = y^3 x$

(B. E. '64, வெங்கடேஸ்வராப் பல்கலைக்கழகம்)

13. $\dfrac{dy}{dx} = x^3 y^3 - xy$

(B. E. '64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம் ;
(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

14. $3 \dfrac{dy}{dx} + y = e^{3x} y^4$

(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

15. $y'(x) + y \sin x = y^2 \sin 2x$

(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

16. $\cos x \cdot y'(x) - y \sin x = y^3 \cos^2 x$

(B. E. '70, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

17. $\dfrac{dy}{dx} - 2y \tan x = y^2 \tan^2 x$

(B. E. '70, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

18. $(x+2y^3) \dfrac{dy}{dx} = y$

19. $(1+y^2)\,dx = (\tan^{-1}y - x)\,dy$

20. $1 + (x \tan y - \sec y)\dfrac{dy}{dx} = 0$

21. $\dfrac{dy}{dx} + x \sin 2y = x^3 \cos^2 y$

(B. E. '55, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

22. $2y \cos y^2 \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{2}{x+1} \sin y^2 = (x+1)^3$

(B. E. '63, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

23. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} + 1 = 2e^{-y}$

24. $\dfrac{dy}{dx} = 1 - x(y-x) - x^3 (y-x)^2$

3. முதல் வரிசையும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட படியுங்கொண்ட சமன்பாடுகள்

(Equations of the first order and of a degree higher than the first)

§19. இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் ஆராயப்போகும் சமன்பாடுகள் முதல் வரிசையும் ஆனால் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட படியுங் கொண்டவை. அப்படிப்பட்ட சமன்பாடுகளை

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்று பொதுவாகக் குறிப்பிடலாம். $\frac{dy}{dx} = p$ என்று சுருக்கமாகக் குறிப்பிட்டால்,

$$(1) \text{ஐ } f(x, y, p) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்று எழுதலாம்.

(2)-ல் அடங்கிய சமன்பாடுகளை மூன்று வகைகளாகப் பிரிக்கலாம்:

(a) (2)-லிருந்து p ஐத் தீர்த்து, பிறகு தீர்வு காணலாம்.

(b) (2)-லிருந்து y ஐத் தீர்த்து, பிறகு தீர்வு காணலாம்.

(c) (2)-லிருந்து x ஐத் திர்த்து, பிறகு தீர்வு காணலாம்.

மேற்கண்ட ஒவ்வொரு வகையிலுமடங்கிய சமன்பாடுகளைத் தீர்ப்பதை இப்போது கவனிப்போம்.

§20. வகை I: p தீர்ப்பதற்கு அமைந்துள்ள சமன்பாடுகள் (Equations solvable for p) :

பொதுவாக, முதல் வரிசை, n படியுள்ள சமன்பாட்டை

$$p^n + P_1 p^{n-1} + P_2 p^{n-2} + \dots + P_{n-1} p + P_n = 0 \quad \dots \quad (1)$$

என்று குறிப்பிடலாம். இங்கு $P_1, P_2, \dots P_n$ முதலியவை x, y அடங்கிய சார்புகள். சில நிலைகளில் (1)-ன் இடப் புறத்துக் கோவையை p-ல் முதல் படி காரணிகளாகப் பிரிக்க இயலும்.

அப்போது (1) ஐ

$$(p - R_1)(p - R_2) \dots (p - R_n) = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

என்று அமைக்கலாம்.

(2)-ல் உள்ள ஒவ்வொரு காரணியையும் தனியே பூச்சியத்துக்குச் சமப்படுத்தினால்,

$$p = R_1, \; p = R_2, \; \dots \; p = R_n$$

என்ற n முதல் வரிசை முதற்படி சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

இவைகளின் தீர்வுகள் முறையே,

$$f_1(x, y, c_1) = 0, \; f_2(x, y, c_2) = 0, \; \dots$$
$$\dots \; f_n(x, y, c_n) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

என்று கொள்வோம்.

$c_1, c_2, \dots c_n$ எல்லாம் மாறிலிகள்.

இந்தத் தீர்வுகள் யாவும் (1)-ன் தீர்வுகளாகும். இவைகளில் $c_1 = c_2 = \dots = c_n = c$ என்று ஒரே மாறிலியை வைத்தாலும், c ஏதாவது ஒரு மதிப்பை எடுத்துக் கொள்வதால், தீர்வுகளின் பொதுத் தன்மை மாறுது. ஆகவே தீர்வுகள்

$$c_1(x, y, c) = 0, \; f_2(x, y, c) = 0, \; \dots f_n(x, y, c) = 0 \quad \dots \quad (4)$$

என்று அமையலாம்.

இந்த n தீர்வுகளைத் தொடுத்து ஒரே சமன்பாட்டில்,

$$f_1(x, y, c) \times f_2(x, y, c) \times \dots \dots f_n(x, y, c) = 0 \dots (5)$$

என்று எழுதலாம்..

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வுகாண்க :

$$p^2 - 5p + 6 = 0$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு $(p - 2)(p - 3) = 0$ ஆகும்.

$\therefore \quad p = 2, 3$

$p = 2$ என்றால், $\dfrac{dy}{dx} = 2$

இதைத் தொகையிட்டால், $y = 2x + c$

$p = 3$ என்றபோது $\dfrac{dy}{dx} = 3$.

இதன் தீர்வு $y = 3x + c$

இரண்டையும் சேர்த்த தீர்வு $(y - 2x - c)(y - 3x - c) = 0$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$p^3 (x + 2y) + 3p^2 (x + y) + (y + 2x) p = 0$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு,

$$p\,[p^2 (x + 2y) + 3p (x + y) + y + 2x] = 0$$
$$p\,[p^2 (x + 2y) + p (x + 2y + y + 2x) + y + 2x] = 0$$
$$p\,[p (x + 2y)(p + 1) + (y + 2x)(p + 1)] = 0$$
$$p (p + 1)\,[p (x + 2y) + y + 2x] = 0$$

இதிலிருந்து கிடைக்கும் தனிச் சமன்பாடுகள் :

$$p = 0 \;\ldots (1), \quad p + 1 = 0 \;\ldots (2),$$
$$p (x + 2y) + y + 2x = 0 \;\ldots (3)$$

(1)-லிருந்து $\dfrac{dy}{dx} = 0 \qquad \therefore \quad y = c$ என்பது தீர்வு ... (i)

(2)-லிருந்து $\dfrac{dy}{dx} = p = -1$

$$dy = -\,dx$$

$\therefore \quad y = -x + c$ என்பது தீர்வு ... ... (ii)

(3)-லிருந்து $\dfrac{dy}{dx} = p = -\dfrac{y+2x}{x+2y}$

குறுக்கே பெருக்கினால்,

$$x\,dy + 2y\,dy = -y\,dx - 2x\,dx$$

$$2y\,dy + 2x\,dx + x\,dy + y\,dx = 0$$

$$2y\,dy + 2x\,dx + d(xy) = 0$$

தொகையிட்டால், $y^2 + x^2 + xy = c$ ... (iii)

(i), (ii), (iii) இவற்றை இணைத்து.

$$(y-c)(y+x-c)(x^2+y^2+xy-c) = 0$$

என்று தீர்வை எழுதலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்வு காண்க :

$$p^2 + 2py\cot x = y^2$$

$$p^2 + 2py\cot x - y^2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இது p-ல் இருபடி சமன்பாடு.

p-க்குத் தீர்வு காணில்,

$$p = \frac{-2y\cot x \pm \sqrt{4y^2\cot^2 x + 4y^2}}{2}$$

$$= \frac{-2y\cot x \pm \sqrt{4y^2(\cot^2 x + 1)}}{2}$$

$$= \frac{-2y\cot x \pm \sqrt{4y^2\operatorname{cosec}^2 x}}{2}$$

$$= \frac{-2y\cot x \pm 2y\operatorname{cosec} x}{2}$$

$$= -y\cot x \pm y\operatorname{cosec} x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2)-ல் + குறியை எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = p = -y\cot x + y\operatorname{cosec} x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{y} = (\operatorname{cosec} x - \cot x)\, dx$$

தொகையிட்டால்,

$$\log y = -\log(\operatorname{cosec} x + \cot x) - \log \sin x + \log c$$

$$\log[y(\operatorname{cosec} x + \cot x)\sin x] = \log c$$

$$\therefore \quad y(\operatorname{cosec} x + \cot x)\sin x = c$$

$$y\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x}\right)\sin x = c$$

$$y(1 + \cos x) = c \qquad \ldots \qquad (3)$$

(2)-ல் — குறியை எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = p = -y\cot x - y\operatorname{cosec} x$$

$$\frac{dy}{y} = (-\cot x - \operatorname{cosec} x)\, dx$$

தொகையிட்டால்,

$$\log y = -\log \sin x + \log(\operatorname{cosec} x + \cot x) + \log c$$

$$\log(y \sin x) = \log c(\operatorname{cosec} x + \cot x)$$

$$\therefore \quad y \sin x = c(\operatorname{cosec} x + \cot x)$$

$$= c\,\frac{(1 + \cos x)}{\sin x}$$

$$y = \frac{c(1 + \cos x)}{\sin^2 x} = \frac{c(1 + \cos x)}{1 - \cos^2 x} = \frac{c}{1 - \cos x}$$

$$y(1 - \cos x) = c \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

(3), (4) லிருந்து $y(1 \pm \cos x) = c$ என்பது தீர்வாகும்.

பயிற்சிகள் 12

தீர்வு காண்க :

1. $p^2 - 9p + 18 = 0$

(B. E. '53, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $x^2 p^2 + 3xyp + 2y^2 = 0$

3. $xyp^2 + p(3x^2 - y^2) - 6xy = 0$

(B. E. '70, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

4. $xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - (x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} + xy = 0$

(B. E. '54, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. $x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\frac{dy}{dx} + 2y^2 = x^2$

(B. E. '46, 72 சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

6. $xp^2 - 2py + x = 0$

(B. E. '55, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. $p - \frac{1}{p} = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

8. $p(p + y) = x(x + y)$

9. $p^2 + \left(x + y - \frac{2y}{x}\right)p + xy + \frac{y^2}{x^2} - y - \frac{y^2}{x} = 0$

10. $p^3 + 2xp^2 - y^2p^2 - 2xy^2p = 0$

(B. E. '67. 69, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

11. $p^3 - (x^2 + xy + y^2)p^2 + (x^3y + x^2y^2 + xy^3)p - x^3y^3 = 0$

12. $p(p + y) = x^2(x^2 + y)$

13. $y = x(p + \sqrt{1 + p^2})$

14. $xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (y^2 - x^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0.$

§21. வகை II : y தீர்ப்பதற்கு அமைந்துள்ள சமன்பாடுகள் (Equations solvable for y)

$f(x, y, p) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து, y ஐத் தீர்த்து, அதன் மதிப்பை x, p இவைகளடங்கிய ஒரு சார்பாக அமைக்கலாம் என்று கொள்வோம். அதாவது $y = F(x, p)$ ... (1)

(1) ஐ x ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}F(x, p) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2)-ன் இடப்புறம் $\frac{dy}{dx} = p.$

வலப்புறத்தில் $\frac{d}{dx} F(x, p)$ யென்பது x, p, $\frac{dp}{dx}$ இவை களடங்கிய ஒரு சார்பாக இருக்கும்.

$\therefore$ (2)-ன் அமைப்பு

$$\phi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

என்றிருக்கும். x, p இவைகளில் முதல் வரிசை, முதற்படி வகைக் கெழுச் சமன்பாடாக (3) இருப்பதால், இரண்டாவது அத்தியா யத்தின் வழிகள் மூலமாக அதன் தீர்வைக் காணலாம்.

அந்தத் தீர்வு

$$\psi(p, x, c) = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

என்றிருக்கட்டும். இப்போது (1), (4) இவைகளிலிருந்து p ஐ நீக்கினல் x, y, c அடங்கிய ஒரு சார்பு கிடைக்கும். அதுவே நாம் வேண்டும் தீர்வாகும்.

சில நிலைகளில் (1), (4) இவைகளிலிருந்து p ஐ நீக்குவது கடினமாக இருக்கலாம். அப்போது (1), (4) இரண்டும் சேர்ந்து தீர்வாகக் கொள்ளலாம். இந்த இரண்டு சமன்பாடுகளும் x, y ஐ p என்ற துணையலகு (parameter) மூலம் அறிவிப்பதாகக் கொள்ள லாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2x\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$\frac{dy}{dx} = p$ என்ருல், சமன்பாடு $yp^2 - 2px + y = 0$ ... (1)

$$y(p^2 + 1) = 2px$$

$$\therefore \quad y = \frac{2px}{p^2 + 1} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

y-ன் மதிப்பு x, p இவற்றில் ஒரு சார்பாக உள்ளது

(2) ஐ x ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$p = \frac{dy}{dx} = 2\,\frac{\left[(p^2+1)\left(p + x\,\frac{dp}{dx}\right) - px \cdot 2p\,\frac{dp}{dx}\right]}{(p^2+1)^2}$$

$$\therefore\ p\,(p^2+1)^2 = 2\left[p\,(p^2+1) + x\,\frac{dp}{dx}\,(p^2+1) - 2p^2 x\,\frac{dp}{dx}\right]$$

$$= 2\left[p\,(p^2+1) + x\,\frac{dp}{dx}\,(1-p^2)\right]$$

$$p\,(p^2+1)^2 - 2p\,(p^2+1) - 2x\,\frac{dp}{dx}\,(1-p^2) = 0$$

$$p\,(p^2+1)\,(p^2+1-2) - 2x\,\frac{dp}{dx}\,(1-p^2) = 0$$

$$(p^2-1)\left[\,p\,(p^2+1) + 2x\,\frac{dp}{dx}\right] = 0$$

இதிலிருந்து $p^2 - 1 = 0$ ... ... (3)

அல்லது,

$$p\,(p^2+1) + 2x\,\frac{dp}{dx} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

முதலில், (4) ஐ எடுத்துக் கொண்டு, அதற்குத் தீர்வு காண்போம்.

(4)-லிருந்து, $p\,(p^2+1)\,dx + 2x\,dp = 0$

$$\therefore\ \frac{dx}{x} + \frac{2\,dp}{p\,(p^2+1)} = 0$$

தொகையிட்டால்,

$$\log x + 2\int \frac{dp}{p\,(p^2+1)} = c' \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

இதில் $\dfrac{1}{p\,(p^2+1)} = \dfrac{A}{p} + \dfrac{Bp+C}{p^2+1}$ என்றால்,

$$1 = A\,(p^2+1) + p\,(Bp+C) \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

$p = 0$ என்று பிரதியிட்டு, $1 = A$

p^2-ன் குணகத்தை ஒப்பிட்டு,

$$0 = A + B$$

$$\therefore \quad B = -A = -1$$

p-ன் குணகத்தை ஒப்பிட்டு, $0 = C$.

$$\therefore \quad \frac{1}{p(p^2+1)} = \frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+1}$$

(5)-லிருந்து, $\log x + 2\left[\int \frac{dp}{p} - \int \frac{p}{p^2+1}\,dp\right] = c'$

$$\log x + 2\log p - \log(p^2+1) = \log c$$

$$\log \frac{p^2 x}{p^2+1} = \log c$$

$$\therefore \quad \frac{p^2 x}{p^2+1} = c \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (7)$$

இப்பொழுது, (1), (7) இவைகளிலிருந்து p ஐ நீக்க வேண்டும்.

(7)-லிருந்து, $p^2 x = p^2 c + c$

$$\therefore \quad p^2 = \frac{c}{x-c} \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (8)$$

(8) ஐ (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$y \cdot \frac{c}{x-c} - 2px + y = 0$$

$$y\left(\frac{c}{x-c} + 1\right) = 2px$$

$$\frac{yx}{x-c} = 2px$$

x ஐ நீக்கினால், $y = 2p(x-c)$

$$\therefore \quad y^2 = 4p^2(x-c)^2$$

$$= \frac{4c}{x-c}(x-c)^2 \qquad \text{[(8) ஐ மீண்டும் பயன்படுத்தி]}$$

$$= 4c(x-c)$$

அதாவது $y^2 = 4cx - 4c^2$ ... ... (9)

இதுவே கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வாகும்.

இப்போது (3)-லிருந்து $p^2 = 1$ ... ... (10)

(1), (10) இவைகளிலிருந்து p ஐ நீக்கவேண்டும்.

நேரிடையாக, இந்த மதிப்பை (1)-ல் பிரதியீட்டால்,

$$y \cdot 1 - 2px + y = 0$$

$$2y - 2px = 0 \quad \text{அல்லது} \quad y = px$$

$$\therefore \quad y^2 = p^2x^2 = x^2$$

$$\therefore \quad y = \pm x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (11)$$

(1), (10) இவைகளிலிருந்து p ஐ நீக்கிய பின், நமக்கு x, y-க்குள்ள ஒரு தொடர்பு (11) கிடைத்திருக்கிறது. இந்தத் தொடரில் ஒரு மாறிலியும் இடம் பெறவில்லை. இதுவும் கொடுத்துள்ள சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வாகும். இதில் மாறிலியொன்றுமில்லாததால், இது தனித் தீர்வு (singular solution) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$y = p^2x + p$$

$$y = p^2x + p \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

x ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = p^2 + x \cdot 2p\frac{dp}{dx} + \frac{dp}{dx}$$

$$p = p^2 + \frac{dp}{dx}(2px + 1)$$

$$p(1-p) = \frac{dp}{dx}(2px + 1)$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{2px}{p(1-p)} + \frac{1}{p(1-p)}$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{2}{p-1}x = \frac{1}{p(1-p)} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இது x-ல் ஒரு நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

தொகையீட்டுக் காரணி

$$= e^{\int \frac{2}{p-1} dp} = e^{2 \log (p-1)} = (p-1)^2$$

(2) ஐ $(p-1)^2$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{d}{dp}[x(p-1)^2] = (p-1)^2 \cdot \frac{1}{p(1-p)} = -\frac{p-1}{p}$$

$$= -1 + \frac{1}{p}$$

தொகையிட்டால்,

$$x(p-1)^2 = c + \int \left(-1 + \frac{1}{p}\right) dp$$

$$= c - p + \log p$$

$$x = \frac{c - p + \log p}{(p-1)^2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

இப்போது (1), (3)-களுக்குமிடையே p ஐ நீக்குவது அரிது. ஆகவே (1)-ம், (3)-ம் சேர்ந்து தீர்வாகும். அவைகள் y, x மதிப்புகளை p என்ற துணையலகு மூலம் கொடுப்பதாகக் கருதலாம்.

பயிற்சிகள் 13

தீர்வு காண்க :

1. $y = -px + x^4p^2$
(B. E. '68, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $4y = x^2 + p^2$

3. $y = x + a \tan^{-1} p$

4. $x - yp = ap^2$

5. $y = (1 + p)x + \cos p$

6. $xp^2 - 2yp + ax = 0$

7. $x^2(y - px) = yp^2$

§ 22. வகை III : x தீர்ப்பதற்கு அமைந்துள்ள சமன்பாடுகள் (Equations solvable for x)

$f(x, y, p) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து, x ஐத் தீர்த்து, அதன் மதிப்பை y, p இவைகளடங்கிய ஒரு சார்பாக அமைக்கலாம் என்று கொள்வோம். அதாவது $x = F(y, p)$ ... (1)

(1) ஐ y ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{d}{dy} F(y, p) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$(2)\text{-ன் இடப்புறம்} = \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = \frac{1}{p}$$

வலப்புறத்தில் $\frac{d}{dy} F(y, p$ என்பது $y, \ p, \ \frac{dp}{dy}$ இவைகளடங்கிய ஒரு சார்பாக இருக்கும்.

$$\therefore \ (2)\text{-ன் அமைப்பு } \phi\left(y, p, \frac{dp}{dy} \right) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

என்றிருக்கும்.

y, p இவைகளில் முதல் வரிசை, முதற்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடாக (3) இருப்பதால், இரண்டாவது அத்தியாயத்தின் வழிகள் மூலமாக அதன் தீர்வைக் காணலாம்.

அந்தத் தீர்வு $\psi(y, p, c) = 0$ ... ... (4)

என்றிருக்கட்டும்.

இப்போது (1), (4) இவைகளிலிருந்து p ஐ நீக்கினால், x, y, c அடங்கிய ஒரு சார்பு கிடைக்கும். அதுவே நாம் வேண்டும் தீர்வாகும்.

அப்படி p ஐ விலக்குவது கடினமாக இருக்கும் நிலையில், (1), (4) இரண்டும் சேர்ந்து தீர்வாகக் கொள்ளலாம். அவைகள் x, y ஐ p என்ற துணையலகு மூலம் அறிவிப்பதாகக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துகாட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$yp^2 - 2px + y = 0.$

குறிப்பு : இந்தக் கணக்கு y-ன் தீர்வு அறிந்து முன்பு செய்யப்பட்டிருக்கிறது. பக்கம், எடுத்துக்காட்டு 1 ஐப் பார்க்கவும். இங்கு x-ன் தீர்வு அறிந்து செய்யப்படும்.

$$yp^2 - 2px + y = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

(1)-லிருந்து, $x = \frac{y(p^2 + 1)}{2p}$ ... ... (2)

(2) ஐ y ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}\left[\frac{p\{y \cdot 2p\frac{dp}{dy} + p^2 + 1\} - y(p^2 + 1)\frac{dp}{dx}}{p^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{p(p^2 + 1) + y\frac{dp}{dy}(2p^2 - p^2 - 1)}{p^2}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{1}{p} = \frac{p(p^2 + 1) + (p^2 - 1)y\frac{dp}{dy}}{2p^2}$$

$$2p = p(p^2 + 1) + (p^2 - 1)y\frac{dp}{dy}$$

$$p(p^2 + 1 - 2) + (p^2 - 1)y\frac{dp}{dy} = 0$$

$$(p^2 - 1)\left(p + y\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

இதிலிருந்து $p^2 - 1 = 0$ ... ... (3)

அல்லது $p + y\frac{dp}{dy} = 0$ ... ... (4)

முதலில் (4) ஐ எடுத்துக்கொண்டு, அதற்குத் தீர்வு காண்போம்.

(4)-லிருந்து $pdy + ydp = 0$

அதாவது $d(py) = 0$

தொகையிட்டால், $py = c$ ... ... (5)

இப்போது (1), (5) இவைகளிலிருந்து p ஐ நீக்க வேண்டும்.

(5)-லிருந்து,

$$p = \frac{c}{y} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

(6) ஐ, (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$y \cdot \frac{c^2}{y^2} - 2\frac{c}{y}x + y = 0$$

$$c^2 - 2cx + y^2 = 0$$

அல்லது, $y^2 = 2cx - c^2$ ... ... (7)

இதுவே கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வாகும்.

இப்போது (3)-லிருந்து $p^2 = 1$ ... ... (8)

(1), (8) இவைகளிலிருந்து p ஐ நீக்க வேண்டும்.

நேரிடையாக p^2-ன் மதிப்பை (8)-லிருந்து (1)-ல் பிரதிபிட்டால்,

$$y \cdot 1 - 2px + y = 0$$

$$2y - 2px = 0 \quad \text{அல்லது} \quad y = px$$

$$\therefore \quad y^2 = p^2x^2 = x^2$$

$$y = \pm x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9)$$

பக்கம் -ல் விளக்கியபடி, (9) ஒரு தனித் தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

தீர்வு காண்க:

$$x = py + ap^2$$

$$x = py + ap^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

y ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$\frac{dx}{dy} = p + y\frac{dp}{dy} + 2ap\frac{dp}{dy}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{p} = p + \frac{dp}{dy}(y + 2ap)$$

$$\frac{1-p^2}{p} = \frac{dp}{dy}(y + 2ap)$$

$$\frac{dy}{dp} = \frac{p}{1-p^2}(y + 2ap)$$

$$\frac{dy}{dp} - \frac{p}{1-p^2}y = \frac{2ap^2}{1-p^2} \qquad \ldots \qquad (2)$$

இது y-ல் ஒரு நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

தொகையீட்டுக் காரணி

$$= e^{-\int \frac{p}{1-p^2}\,dp} = e^{\frac{1}{2}\log(1-p^2)} = \sqrt{1-p^2}$$

(2) ஐ $\sqrt{1-p^2}$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{d}{dp}\left(y\sqrt{1-p^2}\right) = \frac{2ap^2}{1-p^2}\cdot\sqrt{1-p^2} = \frac{2ap^2}{\sqrt{1-p^2}}$$

தொகையிட்டால்,

$$y\sqrt{1-p^2} = c + \int \frac{2ap^2}{\sqrt{1-p^2}}\,dp$$

$$= c + \int \frac{2a\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta}{\cos\theta}$$

($p = \sin\theta$ என்று பிரதியிட்டு)

$$= c + 2a\int \sin^2\theta\,d\theta$$

$$= c + a\int (1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= c + a\left(\theta - \frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$

$$= c + a(\theta - \sin\theta\cos\theta)$$

$$= c + a\left(\sin^{-1}p - p\sqrt{1-p^2}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இப்போது, (1), (3) களுக்குமிடையே p ஐ நீக்குவது அரிது. ஆகவே அவைகளிரண்டும் சேர்ந்து தீர்வாகும். அவைகள் x, y மதிப்புகளை p என்ற துணையலகு மூலம் கொடுப்பதாகக் கருதலாம்.

பயிற்சிகள் 14

தீர்வு காண்க :

1. $p^3 - 4xyp + 8y^2 = 0$
(B. E. '66, '67, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $y = yp^2 + 2px$

3. $x + \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = a$

§ 23. கிளாரோ அமைப்புள்ள சமன்பாடு (Clairaut's form of equation) :

$$y = ux + f(p) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

என்ற சமன்பாடு, கிளாரோ என்பவரால் தீர்வு காணப்பட்டதால், அதற்கு கிளாரோ சமன்பாடு எனப்பெயர்.

(1) ஐ § 21-ல் குறிப்பிட்ட முறைப்படித் தீர்க்கலாம்.

x ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = p + x\,\frac{dp}{dx} + f'(p)\,\frac{dp}{dx}$$

$$p = p + x\,\frac{dp}{dx} + f'(p)\,\frac{dp}{dx}$$

$$\therefore \quad \frac{dp}{dx}\,[x + f'(d)] = 0$$

இதிலிருந்து $\frac{dp}{dx} = 0$ அல்லது $x + f'(p) = 0$

முதலாவதாக $\frac{dp}{dx} = 0$ என்பதை எடுத்துக்கொண்டால்,

$$p = \text{மாறிலி} = c \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$p = c$ என்று (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$y = cx + f(c) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

இது (1)-ன் பொதுத் தீர்வாகும்.

அடுத்து, $x + f'(p) = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$

(1)-க்கும் (4)-க்குமிடையே p ஐ நீக்கினல், x, y அடங்கிய ஒரு தொடர்பு கிடைக்கும். இந்தத் தொடர்பில், ஒரு மாறிலியும் இடம் பெறவில்லையாதலால், முன்பு விளக்கியபடி, அதுவே தனித் தீர்வாகும்.

முக்கியக் குறிப்பு : (1), (3) இவைகளை ஒப்பிடும்போது, கிளாரோ சமன்பாட்டில் p-க்குப் பதிலாக c பிரதியிட்டால், பொதுத் தீர்வு உடனடியாகக் கிடைக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$y = px + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}}$ தனித் தீர்வையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

(B. E. '51, அண்ணுமலைப் பல்கலைக்கழகம் ;
B. E. '6), சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

$$y = px + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இரு பக்கங்களையும் x ஐப்பொருத்து வகையிட்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + a \left[\frac{\sqrt{1+p^2}\,\frac{dp}{dx} - p \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}} \cdot 2p\,\frac{dp}{dx}}{1 + p^2}\right]$$

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + a\frac{dp}{dx}\left[\frac{1 + p^2 - p^2}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$\therefore \quad x\frac{dp}{dx} + a\frac{dp}{dx} \cdot \frac{1}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

$$\frac{dp}{dx}\left[x + \frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}\right] = 0$$

இதிலிருந்து $\frac{dp}{dx} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

அல்லது $x + \frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

முதலில் (2) ஐத் தொகையிட்டால்,

$$p = \text{மாறிலி} = c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

இதை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$y = cx + \frac{ac}{\sqrt{1 + c^2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

என்பது பொதுத் தீர்வாகும்.

அடுத்து, (3)-க்கும் (1)-க்கு மிடையே p ஐ நீக்க வேண்டும்.

(3)-லிருந்து, $\dfrac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} = -x$

$\therefore \quad a^2 = x^2(1+p^2)^3$

$$1 + p^2 = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} \text{ அல்லது } p^2 = \frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - 1 \qquad \ldots \qquad (6)$$

(6) ஐ (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$y = px + \frac{ap}{\sqrt{\dfrac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}}$$

$$= px + ap \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{3}}} = px + p\,a^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{3}} = px^{\frac{1}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\therefore \quad y^2 = p^2 x^{\frac{2}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$= \left(\frac{a^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - 1\right) x^{\frac{2}{3}} \left(x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$= \left(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)^2$$

$$y = \left(x^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{2}{3}}\right)\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (7)$$

(7) தனித் தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$x^2(y - px) = yp^2$$

(B. E. '66, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

$$x^2 = u \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$y^2 = v \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

என்று பிரதியிடுவோம்.

$$\therefore \quad 2x\,dx = du, \quad 2y\,dy = dv$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{2y\,dy}{2x\,dx} = \frac{y}{x}p$$

அல்லது $p = \frac{x}{y} \cdot \frac{dv}{du}$ ... ... (3)

(1), (2), (3) இவற்றைக் கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டில் பிரதியிட்டால், கிடைப்பது

$$u\left(y - \frac{x}{y} \cdot \frac{dv}{du}\, x \right) = y \cdot \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

$$u\left(y^2 - x^2 \frac{dv}{du}\right) = x^2 \left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

$$u\left(v - u \frac{dv}{du}\right) = u \left(\frac{dv}{du}\right)^2$$

அல்லது $v - u \frac{dv}{du} = \left(\frac{dv}{du}\right)^2$

$$v = \frac{dv}{du} \cdot u + \left(\frac{dv}{du}\right)^2 \qquad \dots \quad \dots \quad (4)$$

இது ஒரு கிளோரோ சமன்பாடு.

ஆகவே பொதுத்தீர்வு கிடைக்க $\frac{dv}{du}$-க்குப் பதிலாக (4)-ல் c பிரதியிட வேண்டும்.

$$\therefore \quad v = cu + c^2$$

$y^2 = cx^2 + c^2$ என்பது பொதுத்தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

கிளாரோவின் விரிவுபடுத்தின அமைப்புள்ள சமன்பாடு $y = xf(p) + \phi(p)$ என்பதாகும். (Extended form of Clairaut's equation) அதன் தீர்வைக் காண்க.

$y = xf(p) + \phi(p)$ ... ... (1)

x ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = xf'(p)\frac{dp}{dx} + f(p) + \phi'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$p = f(p) + \frac{dp}{dx}\left[xf'(p) + \phi'(p) \right]$$

இதிலிருந்து,

$$\frac{dx}{dp} = \frac{xf'(p) + \phi'(p)}{p-f(p)}$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p-f(p)}x = \frac{\phi'(p)}{p-f(p)} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2), x-ல் ஒரு நேரியச் சமன்பாடாகும்.

அதனுடைய தீர்வு $F(x, p, c) = 0$ ... ... (3)
என்றிருக்கட்டும்.

(1)-க்கும், (3)-க்குமிடையில் p ஐ நீக்கினல், பொதுத்தீர்வு கிடைக்கும்.

பயிற்சிகள் 15

தீர்வுகாண்க :

1. $y = (x - a)p - p^2$
(B. E. '52, '67, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $y = px + \dfrac{a}{p}$

3. $y = px + \sqrt{1 + p^2}$

4. $y = px + ap(1 - p)$

5. $p^3x - p^2y - 1 = 0$
(B. E. '55 சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

6. $y = apx + bp^3$

7. $y = 2px + y^2p^3$
(குறிப்பு : $2x = u$, $y^2 = v$ என்று பிரதியிடவும்)

8. $y = xp^2 + p$

9. $p^2(x^2 - a^2) = 2pxy - y^2 + b^2$

10. $(x - a)p^2 + (x - y)p - y = 0$

11. $(px - y)(py + x) = a^2 p$
(குறிப்பு : $x^2 = u$, $y^2 = v$ என்று பிரதியிடவும்)

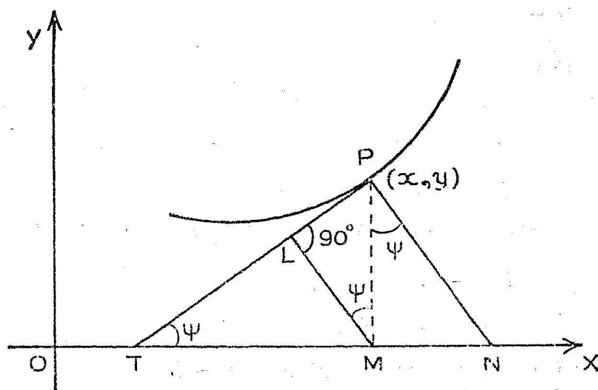
12. $p = \log(px - y)$ (B. E. '37, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்

4. முதல் வரிசை, முதற்படி வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகளின் பயன் முறைகள்

(Applications of differential equations of the first order and the first degree)

§ 24. விஞ்ஞானர், பொறியியல் சார்ந்த பல விதிகளைக் கணித அமைப்பில் எடுத்துரைக்கும்போது வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் ஏற்படுகின்றன. இந்த அத்தியாயத்தில் பல துறைகளிலிருந்து ஏற்படும் முதல் வரிசை, முதற்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை ஆராய்வோம்.

§ 25. **வடிவ கணிதம் சம்பந்தப்பட்ட சமன்பாடுகள்** (equations relating to geometrical problems) :



படம் 1.

வகைநுண் கணிதத்திலிருந்து வளைவரை சம்பந்தப்பட்ட கீழ்க் கண்ட சூத்திரங்களை முதலில் நினைவில் கொள்வோம்.

$f(x, y) = 0$ என்ற வளை வரையில் $P(x, y)$ என்ற புள்ளியாக இருக்கட்டும். P இடத்துத் தொடுகோடும், செங்கோடும் x அச்சை முறையே T, N என்ற புள்ளிகளில் வெட்டட்டும்

$$PM \perp OX,\ P\hat{T}M = \psi \text{ எனின்},\ \tan\psi = \frac{dy}{dx}$$

PT ஐத் தொடுகோடு (tangent), PN ஐச் செங்கோடு (normal), TM ஐக் கிளைத் தொடுகோடு (subtangent), MN ஐக் கிளைச் செங்கோடு (subnormal) என்றும் கூறுவோம்.

$\frac{dy}{dx}$ அடங்கிய கீழ்க்கண்ட சூத்திரங்கள் மூலம், மேற்கண்டவற்றின் நீளங்களை அறியலாம்.

$$TM = \text{கிளைத் தொடுகோடு} = \frac{y}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = y\frac{dx}{dy}$$

$$MN = \text{கிளைச் செங்கோடு} = y\frac{dy}{dx}$$

தொடுகோடு

$$PT = y\sqrt{1 + \frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = y\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}$$

செங்கோடு

$$PN = y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

மேலும் P இடத்து ஒரு மிகச்சிறிய வளைவரை நீளம் ds என்றால்,

$$\left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

தொடுகோடு, செங்கோடு முதலியவற்றின் சம்பந்தத்துடன் ஏதாவது ஒரு வடிவ கணிதத்தன்மை கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், மேற்கண்ட சூத்திரங்களை உபயோகித்து, ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு அமைக்க முடியும். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் இதை விளக்குகின்றன.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

எந்த இடத்துக் கிளைச்செங்கோட்டின் நீளமும் a என்ற மாறிலியாக அமையும் வளைவரையின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

(x, y) என்ற புள்ளியிடத்து கிளைச் செங்கோட்டின்

நீளம் $= y\dfrac{dy}{dx}$

$\therefore$ கேள்விப்படி, $y\dfrac{dy}{dx} = a$

$$y\,dy = a dx$$

தொகையிட்டால், $\dfrac{y^2}{2} = ax + c'$

$$y^2 = 2ax + c \quad (c \text{ ஒரு மாறிலி})$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

ஒரு வளை வரையின் மேல் P என்ற புள்ளியிடத்து அமையும் செங்கோடு x அச்சை P யிலிருந்து ஒரு மாறுத் தூரத்தில் வெட்டுகிறது. அந்த வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடித்து அதைச்சார்ந்த வளைவரைகள் வட்டங்கள் என்று நிறுவுக.

இங்கு $P(x, y)$ என்ற புள்ளியிடத்து

செங்கோட்டின் நீளம் $= k$ (மாறிலி)

$$\therefore \quad y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = k \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

(1) வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

$$y^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right] = k^2$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{k^2}{y^2} - 1 = \frac{k^2 - y^2}{y^2}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \pm\frac{\sqrt{k^2 - y^2}}{y}$$

$$\frac{y\, dy}{\sqrt{k^2 - y^2}} = \pm\, dx$$

$$\frac{-\, y\, dy}{\sqrt{k^2 - y^2}} = \mp\, dx$$

தொகையிட்டால்,

$$\sqrt{k^2 - y^2} = \mp\, x + A$$

$$\therefore \quad k^2 - y^2 = (A \mp x)^2$$

அல்லது $(A \pm x)^2 + y^2 = k^2$ ... ... (௨)

(2) ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

ஒரு வளைவரையில் s நீளமுள்ள இரு புள்ளிகளின் குத்தாயங்கள் (ordinates) வளைவரை, x அச்சு இவைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பு as (a ஒரு மாறிலி). அந்த வளைவரை $(0.\ a)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்றால், அதனுடைய சமன்பாடு யாது ?

ஒரு வளைவரையின் இரு புள்ளிகளின் குத்தாயங்கள், வளைவரை, x-அச்சு இவைகளுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பு A என்றால்,

$$\frac{dA}{dx} = y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

(தொகை நுண் கணித சூத்திரம்)

மேலும் அந்த புள்ளிகளின் வளைநீளம் s என்றால்,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(வகை நுண் கணித சூத்திரம்)

கேள்விப்படி, $A = as$

$$\therefore \quad \frac{dA}{dx} = a\,\frac{ds}{dx}$$

$$y = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

நாம் விரும்பும் வளைவரையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (3) ஆகும்.

(3)-லிருந்து,

$$\frac{y^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{y^2 - a^2}{a^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \frac{\sqrt{y^2 - a^2}}{a}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2 - a^2}} = \pm \frac{1}{a}\, dx$$

தொகையிட்டால்,

$$\cos h^{-1} \frac{y}{a} = \pm \frac{x}{a} + C \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$x = 0, \quad y = a$ என்று (4)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\cos h^{-1} = c$$

$$\therefore \quad c = 0$$

$$\cos h^{-1} \frac{y}{a} = \pm \frac{x}{a}$$

$$\frac{y}{a} = \cos h\left(\pm \frac{x}{a}\right) = \cos h \frac{x}{a}$$

$$\therefore \quad y = a \cos h \frac{x}{a} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

(5) நமக்கு வேண்டிய வளைவரையின் சமன்பாடு. அது ஒரு கயிற்று வளையைக் (catenary) குறிக்கிறது.

பயிற்சிகள் 16

1. ஒரு வளைவரையில் (x, y) என்ற புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சரிவு (gradent) $\frac{2y}{x}$. அந்த வளைவரை $(3, -4)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் சென்றால். அவ்வளைவரை யாது ?

(B. E. '65, ஆந்திராப் பல்கலைக்கழகம்)

2. (x, y) என்ற இடத்துத் தொடுகோட்டின் சரிவு $\frac{x - a}{y - b}$ ஆகவும், ஆதிவழியாகச் செல்லும் வளைவரையைக் கண்டுபிடி.

3. ஒரு வளைவரையின் கிளைத் தொடுகோட்டின் நீளம் ஒரு மாறிலியென்றால், அவ்வளைவரை யாது ?

4. ஒரு வளைவரையின் கிளைத் தொடுகோட்டின் நீளம் x-ஆயத் தொலையையொட்டி நேர்மாற்றம் உடையதானால், அவ் வளைவரை யாது ? அவ்வளைவரை (1, 2); (4, 4) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லுமானால், அவ்வளைவரை யாது ?

5. ஒரு வளைவரையின் கிளைச் செங்கோடு, x-ன் ஆயத் தொலைக்குச் சமம். அவ்வளைவரை யாது ?

6. ஒரு வளைவரையின் (x, y) என்ற புள்ளியிடத்துக் கிளைச் செங்கோடு, அப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளின் பெருக்கலுக்குத் தலைகீழ் எண்ணாக உள்ளது. அந்த வளைவரை (1, 0) என்ற புள்ளி வழியேச் சென்றால், அதன் சமன்பாடு யாது ?

7. அச்சுகளின் இடைப்பட்ட தொடுகோட்டுப் பகுதி, தொடும் புள்ளியில் இரு சமபாகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டால், வளை வரையின் சமன்பாடு யாது ?

8. ஒரு வளைவரையின் P என்ற இடத்துச் செங்கோடு x-அச்சை G-ல் வெட்டுகிறது. G-க்கும் ஆதிக்குமுள்ள தூரம், P-ன் x ஆயத்தொலையின் இரண்டு மடங்கென்றால், அந்த வளை வரை செவ்வக அதிபரவளைவு (rectangular hyperbola) என்று நிரூபி.

9. தொடுகோட்டின் நீளம் k என்ற மாறிலியாக இருக்கும் வளைவரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு யாது ? $(0, k)$ என்ற புள்ளி வழியாகச் செல்லும் அக்குடும்பத்தைச் சேர்ந்த வளைவரையைக் கண்டுபிடி.

10. வளைவரையின் ஒரு புள்ளியின் குத்தாயத்தின் அடியிலிருந்து, அப்புள்ளியின் தொடுகோட்டிற்குள்ள செங்குத்துத் தூரம் c என்ற மாறிலியென்றால் அவ்வளைவரையின் சமன்பாடு யாது ? அவ்வளைவரை y-அச்சை செங்குத்தாக வெட்டினால், தொகையீட்டு மாறிலியைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

[குறிப்பு — படம் 1-ல் Mலிருந்து PT-க்கு ML செங்குத்து தூரமென்றால்,

$$\hat{PML} = \psi; \quad ML = y\cos\psi = \frac{y}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\ ]$$

§ 26. செங்குத்து வீச்சு பாதைகள் : கார்டீசியன் ஆயத் தொலைவுகள் (Orthogonal trajectories : Cartesian coordinates)

ஒரு குடும்பத்தைச் சேர்ந்த வளைவரைகள் ஒவ்வொன்றும் மற்றொரு குடும்பத்தைச் சேர்ந்த வளைவரைகள் ஒவ்வொன்றையும் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொண்டால் ஒரு குடும்பத்தினருக்கு மற்றதின் செங்குத்து வீச்சு பாதைகளெனப் பெயர். இந்த மாதிரி அமைப்பு கொண்ட வளைவரைக் குடும்பங்கள் பல பயன் முறைகளில் ஏற்படுகின்றன. எடுத்துக்காட்டாக, வெப்ப ஓட்டம் ஏற்படக்கூடிய வளைவரைகளும். ஒரே வெப்ப நிலையிலுள்ள புள்ளிகளங்கிய வளைவரைகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து வீச்சுப் பாதைகள். இது மாதிரியே மின்னோட்டப்பாதைகளும் சம அழுத்தமுள்ள வளைவரைகளும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து வீச்சு பாதைகள்.

இப்போது $f(x, y, c) = 0$ ... ... (1)

என்ற சமன்பாடுள்ள ஒரு வளைவரைக் குடும்பத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் c ஒரு மாறிலி c ஐ நீக்கி (1)-க்குகந்த முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை கண்டுபிடிக்கலாம்

அந்த சமன்பாடு $I\left(x, y, \dfrac{dy}{dx}\right) = 0$ ... ... (2)

என்போம்.

(1) ஐச் சேர்ந்த ஒரு வளைவரையும் அதனுடைய செங்குத்து வீச்சான வளைவரையும் (x, y) என்ற புள்ளியில் வெட்டட்டும். இந்த இரு வளைவரைகளுக்கும் (x, y) பொதுப் புள்ளியாகும். முதல் வளைவரையின் சரிவு $\dfrac{dy}{dx}$, இரண்டு வளைவரைகளும் செங்குத்தாக இருப்பதால் $x, y)$ என்ற பொதுப்புள்ளியில் அவற்றின் சரிவுகளின் பெருக்குத்தொகை -1 ஆக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \quad -\frac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}$$ என்பது செங்குத்து வளைவரையின் சரிவாகும்.

ஆகவே (2)-ல் x, y இரண்டையும் வைத்துக்கொண்டு.

$\dfrac{dy}{dx}$-க்குப் பதிலாக $-\dfrac{1}{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}$ ஐப் பிரதியிட்டால், (1)-ன் செங்குத்து வீச்சுப் பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு கிடைக்கும்

இப்படிக் கிடைப்பது

$$F\left(x, y, -\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0$$

அல்லது

$$F\left(x, y, -\frac{dx}{dy}\right) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(3)-ன் தீர்வு, செங்குத்து வீச்சுப் பாதையின் சமன்பாட்டைக் கொடுக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

$y^2 = 4ax$ என்ற பரவளைவுக் குடும்பத்தின் செங்குத்து விச்சுப் பாதையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$$y^2 = 4ax \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

வகைக்கெழுக் காரணின்,

$$2y\frac{dy}{dx} = 4a \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2)-லிருந்து a ஐ நீக்கினால்,

$$y^2 = 2y\frac{dy}{dx} \cdot x \text{ அல்லது } y = 2x\frac{dy}{dx} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(3), கொடுத்துள்ள பரவளைவுக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும். செங்குத்து வீச்சுப் பாதையின் வகைக்கெழு கண்டுபிடிக்க,

(3)-ல் x, y ஐ மாற்றாமல், $\frac{dy}{dx}$ -க்குப் பதிலாக $-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ ஐப் பிரதியிட்டால் போதும்.

$$\therefore \quad y = 2x \times -\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$$

அல்லது

$$y\,dy = -2x\,dx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

இதுவே செங்குத்து வீச்சுப் பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(4) ஐத் தொகையிட்டால்,

$$\frac{y^2}{\text{௨}} = -x^2 + c'$$

$$\therefore \quad y^2 = -2x^2 + c$$

அல்லது $y^2 + 2x^2 = c \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5)$

(5) ஒரு நீள்வட்டக் குடும்பத்தைக் குறிக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$\dfrac{x^2}{a^2+\lambda} + \dfrac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$ என்ற பொதுக்குவிய கூம்பு வளைவுகளின் (confocal conics) செங்குத்து வீச்சுப் பாதைகள், அவைகளேதான் என்று நிறுவுக.

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

வகைக்கெழுக் காணின்,

$$\frac{2x}{a^2+\lambda} + \frac{2y}{b^2+\lambda} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$x(b^2+\lambda) + y(a^2+\lambda)\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\lambda\left(x + y\frac{dy}{dx}\right) = -\left(b^2x + a^2y\frac{dy}{dx}\right)$$

$$\therefore \quad \lambda = -\frac{b^2x + a^2y\dfrac{dy}{dx}}{x + y\dfrac{dy}{dx}} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

(2) ஐ (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{x^2}{\left(a^2 - \dfrac{b^2x + a^2y\dfrac{dy}{dx}}{x + y\dfrac{dy}{dx}}\right)} + \frac{y^2}{\left(b^2 - \dfrac{b^2x + a^2y\dfrac{dy}{dx}}{x + y\dfrac{dy}{dx}}\right)} = 1$$

$$\frac{x^2\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)}{x(a^2-b^2)} + \frac{y^2\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)}{(b^2-a^2)y\frac{dy}{dx}} = 1$$

$$x\left(x + y\frac{dv}{dx}\right) - \frac{y\left(x + y\frac{dy}{dx}\right)}{\left(\frac{dy}{dx}\right)} = a^2 - b^2$$

$$x^2\frac{dy}{dx} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - xy - y^2\frac{dy}{dx} = (a^2-b^2)\frac{dy}{dx}$$

$$xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^2-y^2-a^2+b^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

(3), கொடுத்துள்ள கூம்பு வளைவுகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும். இவைகளின் செங்குத்து வீச்சுப் பாதைகளின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டை கண்டுபிடிக்க, (3)-ல் (x, y) ஐ மாற்றாமல், $\frac{dy}{dx}$-க்குப் பதிலாக, $-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}$ ஐ பிரதியிட்டால் போதும்,

$$\therefore \quad xy \times \left[-\frac{1}{\left(\frac{dy}{dx}\right)}\right]^2 + (x^2 - y^2 - a^2 - b^2)\left(-\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right) - xy = 0$$

$$xy - (x^2 - y^2 - a^2 + b^2)\frac{dy}{dx} - xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

அதாவது,

$$xy\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + (x^2 - y^2 - a^2 + b^2)\frac{dy}{dx} - xy = 0 \ldots (4)$$

(4)-ம் (3)-ம் ஒரே சமன்பாடுதான்.

$\therefore$ (3) னுடைய செங்குத்து வீச்சுப்பாதைகள் அவைகளே தான்.

பயிற்சிகள் 17

1. $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற வட்டக்குடும்பத்தின் செங்குத்து வீச்சுப்பாதையைக் கண்டுபிடிக்கவும். இந்தப் பாதைகள் அந்த வட்டங்களின் ஆரங்களெனக் காட்டவும்.

2. x அச்சை ஆதியில் தொடும் வட்டக் குடும்பத்தின் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டையும் அதன் செங்குத்து வீச்சுப்பாதையையும் கண்டுபிடிக்கவும். (B. E. '70, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

3. $y^2 = 4a(x + a)$ என்ற பொதுக்குவிய பரவளைவுக் குடும்பத்தின் செங்குத்து வீச்சுப்பாதை அதுவேயாகுமென நிறுவுக.

4. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{a^2 + \lambda} = 1$, ($\lambda$ ஒரு மாறிலி) என்ற நீள்வட்டக் குடும்பத்தின் செங்குத்து வீச்சுப்பாதையைக் கண்டுபிடிக்கவும். (B. E. '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்;
B. E. '51, ஆந்திராப் பல்கலைக்கழகம்)

5. $x^2 - xy + y^2 = c$ என்ற நீள்வட்டக் குடும்பத்தின் செங்குத்து வீச்சுப் பாதையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.
(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

6. $x^2 - y^2 = a^2$ என்ற செவ்வக அதிபர வளைவுக் குடும்பத்தின் செங்குத்து வீச்சுப் பாதையைக் காண்கவும்.

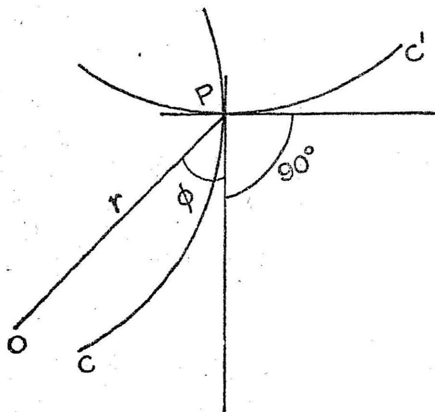
7. $ay^2 = x^3$ என்ற அரை முப்படிப்பரவளை (semicubrical parabola)-க் குடும்பத்தின் செங்குத்து வீச்சுப் பாதையைக் காண்கவும். (B. E. '52, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

§ 27. செங்குத்து வீச்சுப்பாதைகள் : போலார் ஆயத்தொலைகள் (Orthogonal trajectories — Polar coordinates)

$$f(r, \theta, k) = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad (1)$$

என்ற சமன்பாடுள்ள ஒரு வளைவரைக் குடும்பத்தை எடுத்துக் கொள்வோம். இதில் k ஒரு மாறிலி. (1)-லிருந்து θ ஐப் பொருத்து வகைக்கெழுக் கண்டுபிடித்து k ஐ நீக்கிக் கிடைத்தச் சமன்பாடு $F\left(r, \theta, \dfrac{dr}{d\theta}\right) = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \qquad (2)$

என்போம். படத்தில், (1) ஐச் சேர்ந்த C என்ற வளைவரை $P(r, \theta)$ வழியாகச் செல்லுகிறது. P இடத்துத் தொடுகோட்டுக்கும்



படம் 2.

OP-க்கு மிடையேயுள்ள கோணம் ϕ எனில்,

$$\tan\phi = r\frac{d\theta}{dr} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

C' என்ற வளைவரை. C ஐ P-ல் செங்குத்தாக வெட்டட்டும். C'-க்கு P இடத்துத் தொடுகோட்டுக்கும் OP-க்கு மிடையேயுள்ள கோணம் ϕ என்றால், $\phi = 90° + \phi$.

$$\therefore \tan\phi' = \tan(90° + \phi)$$

$$= -\cot\phi$$

$$= -\frac{1}{\tan\phi} = -\frac{1}{r\frac{d\theta}{dr}} = -\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta} \cdots \quad (4)$$

ஆகவே (2)-ல் r, θ இரண்டையும் வைத்துக்கொண்டு,

$r\frac{d\theta}{dr}$-க்குப் பதிலாக $-\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{d\theta}$ ஐப் பிரதியிட்டால்,

(2)-ன் செங்குத்து வீச்சுப்பாதையின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

அதாவது, $\frac{d\theta}{dr}$-க்குப் பதிலாக $-\frac{1}{r^2}\cdot\frac{dr}{d\theta}$

அல்லது, $\frac{dr}{d\theta}$-க்குப் பதிலாக $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ என்று பிரதியிட்டால் போதும்.

இந்த மாற்றத்தினல் கிடைப்பது

$$F\left(r, \theta, -r^2\frac{d\theta}{dr}\right) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

(5)-ன் தீர்வு, செங்குத்து வீச்சுப்பாதையின் சமன்பாட்டைக் கொடுக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு

$r = a(1+\cos\theta)$, $r = b(1-\cos\theta)$ என்ற நெஞ்சு வளைவுகள் (cardioids) செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்கின்றன என்று காட்டவும். (B. E. '52, ஆந்திராப் பல்கலைக்கழகம்)

$$r = a(1+\cos\theta) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

θ ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$\frac{dr}{d\theta} = -a\sin\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$(1) \div (2); \quad \frac{r}{\left(\frac{dr}{d\theta}\right)} = -\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{r\sin\theta}{1+\cos\theta} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(1)-ன் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (3) ஆகும்.

(1)-ன் செங்குத்து வீச்சுப் பாதை கிடைக்க,

(3)-ல் $\frac{dr}{d\theta}$ -க்குப் பதிலாக $-r^2\frac{d\theta}{dr}$ பிரதியிட்டால் போதும்

$$\therefore \quad -r^2\frac{d\theta}{dr} = -\frac{r\sin\theta}{1+\cos\theta}$$

$$\frac{(1+\cos\theta)}{\sin\theta}d\theta = \frac{dr}{r}$$

தொகையிட்டால்,

$$\int \operatorname{cose} \theta \, d\theta + \int \cot \theta \, d\theta = \int \frac{dr}{r} + c'$$

$$-\log (\operatorname{cose} \theta + \cot \theta) + \log \sin \theta = \log r + \log c$$

அதாவது

$$\log \left(\frac{\sin \theta}{\operatorname{cosc} \theta + \cot \theta} \right) = \log cr$$

$$\log \left(\frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} \right) = \log cr$$

$$cr = \frac{\sin^2 \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos^2 \theta}{1 + \cos \theta} = 1 - \cos \theta$$

$$r = \frac{1}{c} (1 - \cos \theta)$$

$$= b (1 - \cos \theta) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

∴ (1)-ம், (4)-ம் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும்.

பயிற்சிகள் 18

1. $r = a \cos \theta$ என்ற வட்டக்குடும்பத்திற்கு செங்குத்து வீச்சுப் பாதை யாது ?

2. $r = \dfrac{2a}{1 + \cos \theta}$ என்ற பொதுச்குவிய பரவளைவுக் குடும்பத்தின் செங்குத்து வீச்சுப் பாதையைக் கண்டுபிடி.

3. $r^n = a^n \cos n\theta$ என்ற வளைவரைக் குடும்பத்தின் செங்குத்து வீச்சுப்பாதையைக் கண்டுபிடி.

§28. இயக்கவியல் சம்பந்தப்பட்ட சமன்பாடுகள் (Equations relating to dynamics) :

O என்ற நிலைப்புள்ளி உடைய கோட்டின்வழிச் செல்லும் ஒரு பொருள் t நொடிக்குப் பின் O-விலிருந்து s தூரத்திலிருந்தால்,

அப்பொருளின் திசை வேகம் (velocity) $v = \dfrac{ds}{dt}$ ... (i)

$$\text{முடுக்கம் (acceleration) } a = \frac{dv}{dt} \quad \ldots \quad \text{(ii)}$$

$$= \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{dv}{ds} \cdot v \quad \ldots \quad \text{(iii)}$$

(i), (ii), (iii) சூத்திரங்களை உபயோகித்து இயக்கவியல் சம்பந்தப் பட்ட சில சமன்பாடுகளின் தீர்வைக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

நிறை m உள்ள ஒரு பொருள் செங்குத்தாக திசைவேகம் v_0 உடன் மேலே எறியப்படுகிறது. காற்றின் தடை (air resistance) திசை வேகத்தைப்போல் k மடங்குள்ளது. t நொடிகளுக்குப்பிறகு பொருளின் திசை வேகம் v என்றால்,

$$v + \frac{mg}{k} = \left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{kt}{m}} \text{ என்று நிறுவுக.}$$

மிகப் பெரிய உயரம் H ஐ அடையும் போது, நேரம் t யாது ?

மேலும் $H = \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2 g}{k^2} \log\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right)$ என்று காட்டவும். (B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

ஆரம்பப் புள்ளி O ஐ ஆதியாக எடுத்துக் கொண்டு, தூரத்தை மேல் திசையில் செங்குத் தாக அளப்போம்.

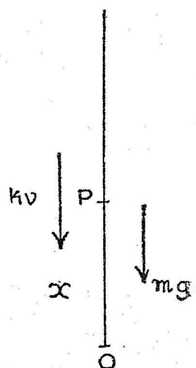
t நொடிக்குப்பிறகு, P என்ற இடத்தில் பொருள் இருக்கட்டும்.

$OP = x$. P-ல் திசைவேகம் $= v$.

P-ல் ஏற்படும் விசைகள்

(i) எடை mg

(ii) காற்றின் தடை kv.



படம் 8.

இரண்டும் செங்குத்தாக கீழ்த்திசையில் இயங்குகின்றன. மொத்த விளைவு விசை $= mg + kv$ (கீழ்த்திசையில்) முடுக்கம் a என்றால், விளைவு விசை $= ma$. (நியூட்டனின் இரண்டாவது இயக்க விதிப்படி). இது செங்குத்தாக பொருள் நகரும் திசையில் இயங்குகிறது.

$$\therefore \quad ma = -(mg + kv)$$

$$a = -g - \frac{k}{m} v \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

ஆனால் $a = \dfrac{dv}{dt}$ ... ... (2)

$$\therefore \quad \frac{dv}{dt} = -g - \frac{k}{m} v$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = -g \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இது v-ல் ஒரு நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

இதன் தொகையீட்டுக் காரணி $= e^{\int \frac{k}{m} dt} = e^{\frac{kt}{m}}$

(3) ஐ $e^{\frac{kt}{m}}$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{d}{dt}\left(v e^{\frac{kt}{m}}\right) = -g e^{\frac{kt}{m}}$$

தொகையிட்டால்,

$$v e^{\frac{kt}{m}} = C - \int g e^{\frac{kt}{m}} dt$$

$$= C - g \cdot \frac{e^{\frac{kt}{m}}}{\frac{k}{m}} = C - \frac{mg}{k} \cdot e^{\frac{kt}{m}}$$

$$\therefore \quad v = Ce^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

ஆரம்பத்தில், $t = 0$ என்றபோது $v = v_0$.

$$\therefore \; v_0 = C - \frac{mg}{k}$$

$$c = v_0 + \frac{mg}{k}$$

c-ன் இந்த மதிப்பை, (4)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$v = \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$$\therefore \; v + \frac{mg}{k} = \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

மிகப்பெரிய உயரம் H ஐ அடையும்போது, $v = 0$.

(6)-ல் $v = 0$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$\frac{mg}{k} = \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}}$$

$$e^{-\frac{kt}{m}} = \frac{mg}{k\left(v_0 + \frac{mg}{k} \right)} = \frac{mg}{kv_0 + mg} \quad \ldots \quad (7)$$

(7) லிருந்து கிடைக்கும் t-ன் மதிப்பு, மிகப்பெரிய உயரத்தை அடையும் நேரத்தைக் கொடுக்கிறது.

$v = \frac{dx}{dt}$ என்பதால், (5) லிருந்து

$$\frac{dx}{dt} = \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mg}{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$$

தொகையிட்டால்,

$$x = A + \int \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} \, dt - \int \frac{mg}{k} \, dt$$

$$= A + \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right) \cdot \frac{e^{-\frac{kt}{m}}}{-\frac{k}{m}} - \frac{mg}{k} t$$

$$= A - \frac{m}{k} \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right) \cdot e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mgt}{k} \quad \ldots \quad (9)$$

ஆரம்பத்தில் $t = 0$ என்றபோது, $x = 0$.

$$\therefore \quad 0 = A - \frac{m}{k} \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right)$$

$$\therefore \quad A = \frac{m}{k} \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right)$$

A-ன் இந்த மதிப்பை (9)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$x = \frac{m}{k} \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right) - \frac{m}{k} \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{kt}{m}} - \frac{mgt}{k} \quad \ldots \quad \ldots \quad (10)$$

(7) லிருந்து கிடைக்கும் t-ன் மதிப்பை (10)-ல் பிரதியிட்டால், கிடைக்கும் x மிகப் பெரிய உயரம் H ஆகும்.

(7) லிருந்து, மடக்கை எடுப்பின்,

$$-\frac{kt}{m} = \log \left(\frac{mg}{kv_0 + mg} \right)$$

$$\therefore \quad t = -\frac{m}{k} \log \left(\frac{mg}{kv_0 + mg} \right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (11)$$

(7), (11) இவைகளை (10)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$H = \frac{m}{k} \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right) - \frac{m}{k} \left(v_0 + \frac{mg}{k} \right) \left(\frac{mg}{kv_0 + mg} \right) - \frac{mg}{k} \times -\frac{m}{k} \log \left(\frac{mg}{kv_0 + mg} \right)$$

$$= -\frac{m}{k}\left(v_0 + \frac{mg}{k}\right) - \frac{m}{k}\left(\frac{kv_0 + mg}{k}\right)\left(\frac{mg}{kv_0 + mg}\right) + \frac{m^2g}{k^2}\log\left(\frac{mg}{kv_0 + mg}\right)$$

$$= \frac{mv_0}{k} + \frac{m^2g}{k^2} - \frac{m^2g}{k^2} + \frac{m^2g}{k^2}\log\left(\frac{mg}{kv_0 + mg}\right)$$

$$= \frac{mv_0}{k} + \frac{m^2g}{k^2}\log\left(\frac{mg}{kv_0 + mg}\right)$$

$$= \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2g}{k^2}\log\frac{mg + kv_0}{mg}$$

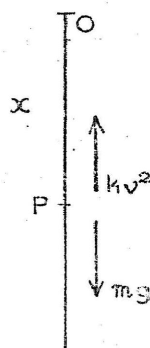
$$= \frac{mv_0}{k} - \frac{m^2g}{k^2}\log\left(1 + \frac{kv_0}{mg}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

நிறை m உள்ள ஒரு பொருள் புவி ஈர்ப்பு விசையால், ஓய்வி லிருந்து செங்குத்தாக கீழே விழுகிறது. காற்றின் தடை, திசை வேகத்தின் வர்கத்தையொட்டி நேர் மாற்றமுடையது. x தூரம் விழுந்த போது, அதனுடைய திசைவேகம் v என்றால்,

$$\frac{2kx}{m} = \log\frac{a^2}{a^2 - v^2}$$ என்று நிறுவுக. இங்கு $\frac{mg}{k} = a^2$

ஆரம்பப் புள்ளி O ஐ ஆதியாக எடுத்துக் கொண்டு, தூரத் தைக் கீழ்த்திசையில் செங்குத்தாக அளப்போம். t நொடிக்குப் பிறகு, பொருள் P என்ற இடத்தில் இருக்கட்டும்.



படம் 4

$OP = x$. P-ல் ஏற்படும் விசைகள் :

(i) எடை mg கீழ்த் திசையில்

(ii) காற்றின் தடை kv^2 மேல் திசையில்

∴ மொத்த விளைவு விசை $= mg - kv^2$ (கீழ்த்திசையில்)

முடுக்கம் a என்றால், விளைவு விசை $= ma$ (நியூட்டனின் இரண்டாவது இயக்க விதிப்படி)

இது செங்குத்தாகப் பொருள் நகரும் திசையில் இயங்குகிறது.

$$\therefore \quad ma = mg - kv^2$$

$$a = g - \frac{k}{m} v^2$$

ஆனால் $a = v \dfrac{dv}{dx}$

$$\therefore \quad v \frac{dv}{dx} = g - \frac{k}{m} v^2$$

$$= \frac{a^2 k}{m} - \frac{k}{m} v^2 \quad \left(\because \quad \frac{mg}{k} = a^2 \right)$$

$$= \frac{k}{m} (a^2 - v^2)$$

$$\therefore \quad \frac{v}{a^2 - v^2} dv = \frac{k}{m} dx$$

தொகையிட்டால்,

$$-\frac{1}{2} \log (a^2 - v^2) = \frac{kx}{m} + A \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

ஆரம்பத்தில், $x = 0$ என்றபோது, $v = 0$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2} \log a^2 = A \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

(2) ஐ (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$-\frac{1}{2} \log (a^2 - v^2) = \frac{kx}{m} - \frac{1}{2} \log a^2$$

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{a^2}{a^2 - v^2} \right) = \frac{kx}{m}$$

அல்லது $\dfrac{2kx}{m} = \log \left(\dfrac{a^2}{a^2 - v^2} \right)$.

பயிற்சிகள் 19

1. நிறை m உள்ள ஒரு பொருள் புவி ஈர்ப்பு விசையால் ஓய்விலிருந்து செங்குத்தாக விழுகிறது. திசைவேகம் v எனும் போது காற்றின் தடை kv^2 உள்ளது. t நொடிகளுக்குப் பிறகு

அதனுடைய திசைவேகம் யாது? அது விழுந்த தூரத்தையும் கண்டுபிடிக்கவும்.

2. மேற்கணக்கில் V திசை வேகத்தை அடைய, அது எவ்வளவு தூரம் விழ வேண்டும் என்பதைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(B. E. '72. மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

3. மெதுவாக ஒரு திரவகத்தில் அமுங்கும் பொருளின் முடுக்கம் α, விசை வேகம் v இரண்டும் $\alpha = g - kv$ (g, k மாறிலிகள்) என்ற சமன்பாட்டுக்கு உட்பட்டிருக்கின்றன. ஆரம்பத்தில் பொருள் ஓய்விலிருந்து கிளம்பினால், அமுங்கின தூரத்தை t-ன் சார்பாகக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(B. E' 70. மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

4. ஆகாய விமானத்தின் நிலைப்புத்தன்மை பற்றிய கொள்கையில் (theory of stability of aeroplane), $\frac{dv}{dt} = g \cos \alpha - kv$ (g, α, k மாறிலிகள்) என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது. $t = 0$ என்றபோது $v = 0$ என்றால், மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

5. ஒரு விசையாட்டச் சுழலியின் (flywheel) கோணத் திசைவேகம் (angular velocity) ω பற்றிய சமன்பாடு,

$$I \frac{d\omega}{dt} = -k\omega^2 \quad (I, k \text{ மாறிலிகள்}) \text{ என்பதாகும்.}$$

ஒரு நிமிடத்தின் முடிவில் கோணத் திசைவேகம் ஆரம்பத்துக் கோணத் திசைவேகத்தின் 90% என்றால், அடுத்த நிமிடத்தின் முடிவில் கோணத் திசைவேகம் $81\frac{9}{11}$% க்குச் சரியும் என்று காட்டவும்.

§29. $\frac{dv}{dx} = ay$ என்ற சமன்பாடு :

$\frac{dy}{dx} = ay$ ... ... (1) என்ற சமன்பாட்டில், a ஒரு + அல்லது − மாறிலியெனக் கொள்வோம். பல துறைகளில் இந்த சமன்பாடு ஏற்படுவதால், இது மிகவும் முக்கியம் வாய்ந்ததாகும்.

(1)-லிருந்து மாறிகளைப் பிரித்தால்,

$$\frac{dv}{y} = a\,dx$$

தொகையிட்டால்,

$$\log y = ax + A$$

$$\therefore \quad y = e^{ax+A} = e^{ax} \cdot e^{A}$$

அதாவது,

$$y = Ce^{ax} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

($e^{A} = c$ என்று பிரதியிட்டு)

சமன்பாடு (1) ஐயும் அதன் தீர்வு (2) ஐயும் நினைவில் கொள்வது அவசியம்.

அடுத்து வரும் பகுதிகளில் மேற்கண்ட சமன்பாடு ஏற்படும் சில நிலைகளை ஆராய்வோம்.

§ 30. இயற்கை வளர்விதி (Law of Natural Growth) :

ஒரு நாட்டின் ஜனத்தொகை ஒரு குறிப்பிட்ட சமயத்தில் N எனக் கொள்வோம். சாதாரண சூழ்நிலையில், ஜனத்தொகை மாறும் விகிதம் N-க்கு நேர் மாற்றமுடையது என்று எதிர் பார்க்கலாம். ஆகவே $\frac{dN}{dt} = kN$ என்ற சமன்பாடு, ஜனத்தொகை வளரும் விதியைக் குறிக்கிறது. இவ்வாறே தானாகவே உண்டாகக் கூடிய எந்தத் தொகையும் மாறும் விகிதம் மேற்கண்ட சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படும். N என்பது கிருமிகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பிட்டால், அவைகளின் வளரும் விதி மேற்கண்ட சமன்பாட்டால் குறிக்கப்படும்.

§ 31. சிதைவு விதி (Law of decay or Law of decomposition) :

கதிர் இயக்கப் பொருளில், அணுக்கள் அவைகளாகவே சிதறுகின்றன. அந்தப் பொருளில் ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில் N எண்ணிக்கையுள்ள அணுக்களிருந்தால், இந்தத் தொகை சிதறும் விகிதம், N-க்கு நேர் மாற்றம் உடையதென்று தெரிகிறது. ஆகவே, $\frac{dN}{dt} = -kN$ என்ற சமன்பாடு, மேற்கண்ட விதியிலிருந்து கிடைக்கிறது.

§ 32. கூட்டு வட்டி விதி (Compound Interest Law)

குறிப்பிட்ட அசல் தொகை $r\%$ தொடர்ச்சி கூட்டு வட்டிக்கு விடப்பட்டதாகக் கொள்வோம். காலம் t சென்ற பிறகு, அசலும் வட்டியும் சேர்ந்து A தொகை என்றால், மிகச் சிறிய காலம் Δt-ல் தொகையில் மாறுதல் ΔA என்போம்.

ΔA என்ற மாற்றம் இந்த சிறிய காலத்திற்குண்டான வட்டியால்தான் என்று வைத்துக்கொள்ளலாம்.

$$\therefore \quad \Delta A = A \cdot \frac{r}{100} \Delta t$$

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{Ar}{100}$$

$$\therefore \quad \underset{\Delta t \to 0}{Lt} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{Ar}{100}$$

அதாவது $$\frac{dA}{dt} = \left(\frac{r}{100}\right) \cdot A = kA.$$

இந்த சமன்பாடு $\frac{dy}{dx} = ay$ என்ற அமைப்பில் இருக்கிறது.

ஆகவே $\frac{dy}{dx} = ay$ என்ற சமன்பாட்டை தொடர் வட்டி விதி என்றும் குறிப்பிடுவது வழக்கம்.

§ 33. நியூட்டன் குளிர்வு விதி (Newton's Law of Cooling)

ஒரு உஷ்ணமான பொருள் வெப்பம் குறைந்து வரும் விகிதம் அதன் வெப்பநிலைக்கும் சூழ்நிலையின் வெப்ப நிலைக்குமுள்ள வித்தியாசத்துக்கு நேர் மாற்றமுடையது என்பது நியூட்டன் குளிர் விதியாகும். பொருளின் வெப்பநிலை T, சூழ்நிலையின் வெப்பநிலை T_0, t கால அளவு என்றால்,

$$\frac{dT}{dt} = -k\ (T-T_0)$$ என்பது மேற்படி விதி.

$T-T^0 = y$ என்றால்,

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dy}{yt} \quad (T_0 \text{ ஒரு மாறிலி})$$

∴ மேற்கண்ட சமன்பாடு,

$$\frac{dy}{dt} = -ky \text{ என்றாகும்.}$$

இதுவும் § 29-ல் விளக்கிய சமன்பாட்டின் அமைப்புள்ளது. இங்கு y என்பது பொருளின் வெப்பநிலைக்கும் சூழ்நிலை வெப்பநிலைக்குமுள்ள வித்தியாசத்தைக் குறிக்கிறது.

§ 34. முதல் வகை ரசாயண வினைக்கள் (First Order Chemical Reactions) :

சில ரசாயண வினைக்களில், மாறும் பொருளின் அளவு ஒரு சமயத்தில் N என்றால், மாறும் விகிதம் N-க்கு நேர் மாற்றம் எனத் தெரிகிறது. ஆகவே இந்த நிலையை $\frac{dN}{dt} = -kN$ என்ற சமன்பாட்டால் குறிக்கலாம்.

§ 35. காற்றின் அழுத்தம் (Atmospherie Pressure) :

கடல்மட்டத்துக்கு h உயரத்தில் காற்றின் அழுத்தம் p என்றால், p மாறும் விகிதம் p-க்கு நேர் மாற்றமெனத் தெரிகிறது.

ஆகவே, $\frac{dp}{dh} = kp$ என்பது இந்த விதியைக் குறிக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

யூரேனியம் சிதறும் விகிதம், அத் தருணத்திலிருக்கும் அதன் அளவுக்கு நேர் மாற்றமாயிருக்கிறது. T_1, T_2 என்ற காலங்களில் முறையே M_1, M_2 கிராம்கள் அளவுள்ள யூரேனியம் இருப்பின், பாதி அளவு யூரேனியம் $\frac{(T_2 - T_1)\log 2}{\log\left(\frac{M_1}{M_2}\right)}$ என்ற கால அளவில் இருக்குமென்று நிரூபி.

கால அளவு t-ல் x கிராம் யூரேனியம் இருப்பதாகக் கொள்வோம்.

$$\therefore \frac{dx}{dt} = -kx \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்பது சிதறல் விதி.

(1)-ன் தீர்வு,

$$x = Ce^{-kt} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

கேள்விப்படி, $t = T_1$ என்றபோது $x = M_1$

$t = T_2$ என்றபோது $x = M_2$

இந்த மதிப்புகளை (2)-ல் பயன்படுத்தினல்,

$$M_1 = ce^{-kT_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$M_2 = ce^{-kT_2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

ஆரம்பத்தில் $t = 0$ என்றபோது, (2)-லிருந்து,

$$x = c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

இதுதான் ஆரம்பத்திலிருந்து யூரேனியத்தின் அளவு.

$x = \frac{c}{2}$ என்றபோது கால அளவு t நமக்குத் தேவை.

$x = \frac{c}{2}$ என்று (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{c}{2} = ce^{-kt}$$

$$\therefore \quad e^{-kt} = \frac{1}{2}$$

$$-kt = \log\left(\frac{1}{2}\right) = -\log 2$$

$$\therefore \quad t = \frac{1}{k}\log 2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

இப்போது k ஐக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

$$(3) \div (4); \quad \frac{M_1}{M_2} = \frac{e^{-kT_1}}{e^{-kT_2}} = e^{k(T_2 - T_1)}$$

$$\therefore \quad \log\left(\frac{M_1}{M_2}\right) = k(T_2 - T_1)$$

$$k = \frac{1}{(T_2 - T_1)}\log\left(\frac{M_1}{M_2}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

(7) ஐ (6)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$t = \frac{(T_2 - T_1)}{\log\left(\frac{M_1}{M_2}\right)} \cdot \log 2$$

இதுதான் நாம் வேண்டிய கால அளவு.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$100°C$ வெட்பநிலையுள்ள ஒரு பொருள் $20°C$ வெட்பநிலையுள்ள சூழ்நிலையில் குளிரடைகிறது. 10 நிமிடங்களில் அது $75°C$-க்குக் குளிர்ந்தால், எப்போது $25°C$ வெட்பநிலையை அடையும். அரைமணிக்குப் பிறகு அதன் வெட்பநிலை யாது ?

(B. E. '64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

t நிமிடங்களுக்குப் பிறகு பொருளின் வெட்பநிலைக்கும் சூழ்நிலையின் வெட்பநிலைக்குமுள்ள வித்தியாசம் y என்றால்,

$$\frac{dy}{dt} = -ky \quad \ldots \quad (1)$$ (நியூட்டன் குளிர்ச்சி விதிப்படி)

(1)-ன் தீர்வு $y = Ce^{-kt}$ ... ... (2)

ஆரம்பத்தில், $y = 100 - 20 = 80$

$\therefore$ $t = 0$, $y = 80$ என்ற மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$80 = c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

c-ன் இந்த மதிப்பை (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$y = 80e^{-kt} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$t = 10$ என்றபோது, $y = 75 - 20 = 55$

$\therefore$ இந்த மதிப்புகளை (4)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$55 = 80e^{-10k}$$

$$(e^{-k})^{10} = \frac{55}{80} = \frac{11}{16}$$

$$\therefore \quad e^{-k} = \left(\frac{11}{16}\right)^{\frac{1}{10}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

பொருளின் வெப்பநிலை $25°$ ஆகும்போது,

$$y = 25 - 20 = 5.$$

இதற்குத் தகுந்த t-ன் மதிப்பு t_1 என்றால்,

$$5 = 80e^{-kt_1} \text{ [(4)-லிருந்து]}$$

$$\therefore \quad e^{-kt_1} = \frac{5}{80} = \frac{1}{16}$$

$$\left(e^{-k}\right)^{kt_1} = \frac{1}{16}$$

$$\left(\frac{11}{16}\right)^{\frac{t_1}{10}} = \frac{1}{16} \quad \text{[(5) ஐப் பயன்படுத்தி]}$$

மடக்கை எடுப்பின்,

$$\frac{t_1}{10} \log\frac{11}{16} = \log\frac{1}{16}$$

$$\therefore \quad t_1 = 10 \,.\, \frac{\log\left(\frac{1}{16}\right)}{\log\left(\frac{11}{16}\right)} = 74 \text{ நிமிடங்கள்}$$

$t = 30$ என்றபோது, (4)-லிருந்து.

$$y = 80\,e^{-30k}$$

$$= 80\left(e^{-k}\right)^{30}$$

$$= 80\left[\left(\frac{11}{16}\right)^{\frac{1}{10}}\right]^{30}$$

$$= 80 \times \left(\frac{11}{16}\right)^{3}$$

$$= 26.$$

பொருளின் வெட்பநிலை $- 20° = 26$

$\therefore$ பொருளின் வெட்பநிலை $= 46°c$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

கடல் மட்டத்தில் காற்றின் அழுத்தம் சதுர அங்குலத்துக்கு 14·7 பவுண்டுகளாகவும் 10,000 அடி உயரத்தில் சதுர அங்குலத்துக்கு 10·1 பவுண்டுகளாகவுமுள்ளது. 15,000 அடி உயரத்தில் காற்றின் அழுத்தம் யாது ?

கடல் மட்டத்துக்கு h உயரத்தில் காற்றின் அழுத்தம் p என்றால், p மாறும் விகிதம் p-க்கு நேர் மாற்றமென விதி.

$$\therefore \quad \frac{dp}{dh} = kp \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

(1)-ன் தீர்வு $p = c\,e^{kh}$ ... ... (2)

$h = 0$ என்றபோது, $p = 14{\cdot}7$

இந்த மதிப்புகளை (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$14{\cdot}7 = c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$\therefore \quad p = 14{\cdot}7\, e^{kh} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$h = 10000$ என்றபோது, $p = 10{\cdot}1$

$$\therefore \quad 10{\cdot}1 = 14{\cdot}7\, e^{10000\,k}$$

$$(e^k)^{10000} = \frac{10{\cdot}1}{14{\cdot}7}$$

$$e^k = \left(\frac{10{\cdot}1}{14{\cdot}7}\right)^{\frac{1}{10000}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$h = 15000$ என்றபோது, (4)-லிருந்து

$$p = 14{\cdot}7\, e^{15000\,k}$$

$$= 14{\cdot}7\,(e^k)^{15000}$$

$$= 14{\cdot}7\left(\frac{10{\cdot}1}{14{\cdot}7}\right)^{\frac{15000}{10000}} \quad [\text{(5) ஐப் பயன்படுத்தி}]$$

$$= 14{\cdot}7\left(\frac{10{\cdot}1}{14{\cdot}7}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$= 8{\cdot}3$ பவுண்டுகள் சதுர அங்குலத்துக்கு.

பயிற்சிகள் 20

1. கிருமிகளின் தொகை N என்றால் அவைகள் வளரும் விகிதம் N-க்கு நேர் மாற்றமுடையது. ஆரம்பத்தில் $N = 100$. ஒரு மணிக்குப் பிறகு $N = 332$ என்றால் $1\frac{1}{2}$ மணிகளுக்குப் பிறகு N-ன் மதிப்பு யாது?

2. ஒரு இரசாயன வினையில், கால அளவு t-ல் பொருளின் அளவின் நேர்மாற்றமாக, பொருளின் மாறும் விகிதம் இருக்கிறது. 1 மணிக்குப்பிறகு பொருளில் 60 கிராம்களும் 4 மணிக்குப்பிறகு 21 கிராம்களும் மீதியிருந்தன என்றால் ஆரம்பத்தில் இருந்த பொருளின் அளவு யாது ?

3. ஜனத்தொகையின் மாறும் விகிதம், அத்தொகைக்கு நேர் மாற்றமாயிருக்கிறது. 40 வருடங்களில் ஒரு நகரத்தின் ஜனத்தொகை 40,000-லிருந்து 60,000-க்கு அதிகமானால், 60 வருட முடிவில் அந்நகரின் ஜனத்தொகை யாது ?

4. ஒரு பொருள் குளிரும் விகிதம், அதனுடைய வெட்ப நிலைக்கும் சூழ்நிலையின் வெட்பநிலைக்குமுள்ள வித்தியாசத்துக்கு நேர் மாற்றமாக உள்ளது. 25° வெப்பமுள்ள சூழ்நிலையில் 100°-யிலிருந்து 1 நிமிடத்திற்கு 75°-க்கு ஒரு பொருள் குளிர்ந்தால், 3 நிமிடங்களுக்குப்பிறகு அதன் வெட்பநிலை யாது ?

(B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. 30° வெட்பநிலையுள்ள சூழ்நிலையில் ஒரு பொருள் 80°-யிலிருந்து 60°-க்கு 12 நிமிடங்களில் குளிர்ந்தால், 24 நிமிடங்களுக்குப்பிறகு அதனுடைய வெட்பநிலை யாது ?

6. 75°C வெட்பநிலையுள்ள பொருள் 25°C வெட்பநிலையுள்ள சூழ்நிலையில் $k\theta$ என்ற விகிதத்தில் குளிரடைகிறது. இங்கு θ, சூழ்நிலைக்குமேல் பொருளின் வெட்பநிலையின் அதிக எண்ணிக்கையைக் குறிக்கிறது. 10 நிமிடங்களுக்குப் பிறகு, பொருளின் வெட்பநிலை 65°C என்றால், 20 நிமிடங்களுக்குப்பிறகு அதன் வெட்பநிலை யாது ? 55°C வெட்பநிலையை அடைய எவ்வளவு நேரம் ஆகும் என்பதையும் காண்க.

(B. E. '65, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. தண்ணீர், வெளிச்சத்தை உட்கிரகித்துக்கொள்ளுகிறது என்ற நியதி, கடல் ஆழத்தில் இருள் உள்ளது என்பதிலிருந்து தெரிகிறது. 10 அடி ஆழத்தில் நீர், மேல் தளத்தில் அடிக்கும் வெளிச்சத்தில் 40% ஐ கிரகித்துக் கொள்ளுகிறது. 247 அடி ஆழத்தில், மேல் தளத்தில் அடிக்கும் வெளிச்சத்தில் $\frac{1}{300000}$ பங்குதான் இருக்கும் என்று நிறுவுக. வெளிச்சத்தை உட்கிரகிக்கும் விகிதம் வெளிச்சத்துக்கு நேர் மாற்றமாயிருக்குமென்று எடுத்துக்கொள்ளவும்.

8. கடல்மட்டத்தில் காற்றின் அழுத்தம் சதுர அங்குலத்துக்கு 14·7 பவுண்டுகளாகவும், 1000 அடி உயரத்தில் சதுர அங்குலத்துக்கு 14 பவுண்டுகளாகவுமுள்ளது. 70,000 அடி உயரத்தில் காற்றின் அழுத்தம் யாது ?

§ 36. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற நேரிய சமன்பாடு :

இந்த சமன்பாட்டில் P, Q இரண்டும் மாறிலிகள் அல்லது x ஐப் பொருத்த சார்புகள். அதாவது அவைகளில் y இடம் பெறுது. இந்த வகை ஏற்படும் சில நிலைகளை அடுத்து வரும் பகுதிகளில் ஆராய்வோம்.

§ 37. எளிய மின் சுற்றுக்கள் (Simple Electric Circuits) :

ஒரு எளிய மின் சுற்றில் கீழ்க்காணும் மூன்று உறுப்புக்கள் (clements) இடம் பெறுகின்றன.

(i) மின் தடை R (Resistance)



படம் 5.

இது மின்னோட்டத்தைத் (current) தடுப்பதற்குப் பயன்படும் மின் சுற்றின் ஒரு துணையலகாகும் (parameter).

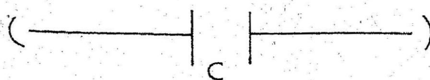
(ii) மின் தூண்டம் L (Inductance)



படம் 6.

இது மின்னோட்டத்தின் மாறுதலைத் தடுப்பதற்குப் பயன்படும் மின் சுற்றின் ஒரு துணையலகாகும்.

(iii) மின் தேக்கம் C (Capacitance)



படம் 7.

இது மின்னழுத்தத்தின் (voltage) மாறுதலைத் தடுப்பதற்குப் பயன்படும் மின் சுற்றின் ஒரு துணையலகாகும்.

மேற்கண்ட உறுப்புக்கள் வழியாகச் செல்லும் மின்னோட்டம் (i)-ம் அதனால் ஏற்படும் மின்னழுத்தக் குறைவு (e)-ம் கீழ்க்கண்டவாறு தொடர்பு கொண்டுள்ளன.

(i) மின்தடை R மூலம் ஏற்படும் மின்னழுத்தக்குறைவு

$$e = Ri$$

(ii) மின் தூண்டம் L மூலம் ஏற்படும் மின்னழுத்தக்குறைவு

$$e = L\frac{di}{dt}$$

(iii) மின் தேக்கம் C மூலம் ஏற்படும் மின்னழுத்தக்குறைவு

$$e = \frac{q}{C}$$

இங்கு q என்பது மின்னூட்டம் (electric charge).

மேலும் மின்னூட்டத்தின் பாய்வேகல் i என்றால்,

$$i = \frac{dq}{dt}.$$

மின் சுற்றுக்குகந்த வகைக்கெழுச் சமன்பாடு கண்டுபிடிக்க கீழ்க்கண்ட கிர்க்காஃப் விதி (Kirchoff's law) பயன்படும்.

ஒரு முற்றுச் சுற்றில் (Closed circuit) ஏற்படும் மின்னழுத்தக் குறைவுகளின் குறியியல் கூடுதல் (algebraic sum) அந்தச் சுற்றிலுள்ள வெளி மின்னழுத்தத்துக்குச் சமம்.

§ 38. R, L தொடர் சுற்றின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு :

மின்தடை R, மின்தூண்டம் L கொண்ட ஒரு மின்சுற்றில் பொருத்தப்பட்ட மின்னழுத்தம் E என்று கொள்வோம். கால அளவு t-ல், சுற்றில் பாயும் மின்னோட்டம் i என்றால், R, L இவைகளால் ஏற்படும் மின்னழுத்தக் குறைவுகளின் கூடுதல்

$$= Ri + L\frac{di}{dt}$$

∴ கிர்க்காஃப் விதிப்படி,

$$Ri + L\frac{di}{dt} = E$$

$$\therefore \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இது i-ல் ஒரு நேரிய சமன்பாடு.

E ஒரு மாறிலி எனக் கொள்வோம்.

$$\text{தொகையீட்டுக் காரணி} = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{Rt}{L}}$$

(1) ஐ $e^{\frac{Rt}{L}}$ ஆல் பெருக்கினால்,

$$\frac{d}{dt}\left(i e^{\frac{Rt}{L}} \right) = \frac{E}{L} \cdot e^{\frac{Rt}{L}}$$

தொகையிட்டால்,

$$i e^{\frac{Rt}{L}} = A + \frac{E}{L} \int e^{\frac{Rt}{L}} dt$$

$$= A + \frac{E}{L} \cdot \frac{e^{\frac{Rt}{L}}}{\frac{R}{L}}$$

$$= A + \frac{E}{R} e^{\frac{Rt}{L}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

ஆரம்பத்தில், சுற்றில் மின்னோட்டம் இல்லையென்றால்,

$t = 0$ என்றபோது $i = 0$

$$\therefore \quad (2)\text{-லிருந்து} \quad 0 = A + \frac{E}{R}$$

$$\therefore \quad A = -\frac{E}{R}$$

A-ன் இந்த மதிப்பை (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$i e^{\frac{Rt}{L}} = -\frac{E}{R} + \frac{E}{R} e^{\frac{Rt}{L}}$$

$$\therefore \quad i = -\frac{E}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E}{R}$$

$$= \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

t-ன் மதிப்பு அதிகரிக்கும்போது, $e^{-\frac{Rt}{L}}$-ன் மதிப்பு குறைகிறது. ஆகவே i-ன் மதிப்பு அதிகரிக்கிறது.

$t \longrightarrow \infty$ என்றபோது, $i \longrightarrow \frac{E}{R}$.

இது i-ன் மிகப்பெரியதும் நிலையான மதிப்புமாகும்.

§ 39. R, C தொடர் சுற்றின் வகைக்கெழுச் சமன்பாடு

மின்தடை R, மின்தேக்கம் C கொண்ட ஒரு மின் சுற்றில், பொருத்தப்பட்ட மின்னழுத்தம் E என்று கொள்வோம். கால அளவு t-ல் சுற்றில் பாயும் மின்னோட்டம் i, மின்னூட்டம் q என்றால், R, C இவைகளால் ஏற்படும் மின்னழுத்தக் குறைவுகளின் கூடுதல் $= Ri + \frac{q}{c}$

$\therefore$ கிர்க்காஃப் விதிப்படி,

$$Ri + \frac{q}{c} = E \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\text{ஆனால்} \quad i = \frac{dq}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2) ஐ (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = E$$

$$\frac{dq}{dt} + \frac{1}{CR} q = \frac{E}{R} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இது q-ல் ஒரு நேரிய சமன்பாடு.

E ஒரு மாறிலி எனக்கொள்வோம்.

தொகையீட்டுக் காரணி $= e^{\int \frac{1}{CR} dt} = e^{\frac{t}{CR}}$

(3) ஐ $e^{\frac{t}{CR}}$ ஆல் பெருக்கினல்,

$$\frac{d}{dt}\left(q\, e^{\frac{t}{CR}} \right) = \frac{E}{R}\, e^{\frac{t}{CR}}$$

தொகையிட்டால்,

$$q\, e^{\frac{t}{CR}} = A + \frac{E}{R} \int e^{\frac{t}{CR}}\, dt$$

$$= A + \frac{E}{R} \cdot \frac{e^{\frac{t}{CR}}}{\frac{1}{CR}}$$

$$= A + EC \cdot e^{\frac{t}{CR}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

ஆரம்பத்தில் $t = 0$ என்றபோது $q = 0$

$\therefore$ (4) லிருந்து $0 = A + EC$

$$\therefore \quad A = -EC$$

A-ன் இந்த மதிப்பை (4)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$q\, e^{\frac{t}{CR}} = -EC + EC \cdot e^{\frac{t}{CR}}$$

$$q = -Ec \cdot e^{-\frac{t}{cR}} + Ec$$

$$= Ec\left(1 - e^{-\frac{t}{cR}} \right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

q-ன் வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{dq}{dt} = Ec \cdot -e^{-\frac{t}{cR}} \times -\frac{1}{cR} = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{cR}}$$

$$\therefore \quad i = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{cR}}$$

எடுத்துக்காட்டு :

மின் தடை R, மின் தூண்டம் L, மின்னழுத்தம் $E \sin \omega t$ என்றுள்ள மின் சுற்றில் பாயும் மின்னோட்டம் i ஐக் கொடுக்கும் சமன்பாடு,

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \sin \omega t \text{ ஆகும்.}$$

$t = 0$ என்றபோது, $i = 0$ என்றால்,

$$i = \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \left[\sin (\omega t - \phi) + \sin \phi \cdot e^{-\frac{Rt}{L}} \right]$$

என்று நிரூபிக்கவும்.

$$\text{இங்கு} \quad \phi = \tan^{-1} \frac{L\omega}{R}.$$

(B. E. '66, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம் ;
B. E. '65, ஆந்திராப் பல்கலைக்கழகம்)

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E \sin \omega t$$

$$\therefore \quad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E}{L} \sin \omega t \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இது i-ல் நேரிய சமன்பாடு.

$$\text{தொகையீட்டுக் காரணி} = e^{\int \frac{R}{L} dt} = e^{\frac{Rt}{L}}$$

(1) ஐ $e^{\frac{Rt}{L}}$ ஆல் பெருக்கினால்,

$$\frac{d}{dt}\left(i e^{\frac{Rt}{L}}\right) = \frac{E}{L} e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t$$

தொகையிட்டால்,

$$i e^{\frac{Rt}{L}} = A + \frac{E}{L} \int e^{\frac{Rt}{L}} \sin \omega t \, dt$$

$$= A + \frac{E}{L} \cdot \frac{e^{\frac{Rt}{L}}}{\left(\frac{R^2}{L^2} + \omega^2\right)} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t\right)$$

$$= A + \frac{E e^{\frac{Rt}{L}}}{(R^2 + L^2 \omega^2)} (R \sin \omega t - L \omega \cos \omega t)$$

$$i = A e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \left(\frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \sin \omega t - \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} \cos \omega t\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$\phi = \tan^{-1} \frac{L\omega}{R}$ என்றதனுல்.

$$\tan \phi = \frac{L\omega}{R}$$

$$\therefore \quad \cos \phi = \frac{1}{\sec \phi} = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{L^2 \omega^2}{R^2}}}$$

$$= \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

$$\sin \phi = \tan \phi \cdot \cos \phi = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}}$$

$\sin \phi$, $\cos \phi$ இவைகளை (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$i = A e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2 \omega^2}} (\sin \omega t \cos \phi - \sin \phi \cos \omega t)$$

$$= A e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin(\omega t - \phi) \quad \ldots \quad (3)$$

$t = 0, \quad i = 0$ என்ற மதிப்புகளை (3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = A + \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin(-\phi) = A - \frac{E \sin\phi}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$$

$$\therefore A = \frac{E \sin\phi}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

A-ன் இந்த மதிப்பை (3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$i = \frac{E \sin\phi}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} e^{-\frac{Rt}{L}} + \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

$$= \frac{E}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \left[\sin((\omega t - \phi) + \sin\phi \cdot e^{-\frac{Rt}{L}} \right]$$

பயிற்சிகள் 21

1. மின்தடை R, மின்தூண்டம் L கொண்ட ஒரு மின் சுற்றில் மின்னோட்டம் i பற்றிய சமன்பாடு $L\frac{di}{dt} + Ri = E$ என்பதாகும். E ஒரு மாறிலி. ஆரம்பத்தில் சுற்றில் மின்னோட்டம் ஏதுமில்லை யென்றால்,

$$i = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}}\right) \text{ என்று நிறுவுக.}$$

(B. E. '64, வெங்கடேசா பல்கலைக்கழகம்)

2. மின்தடை R, மின்தேக்கம் C, மின்னழுத்தம் E உள்ள மின்சுற்றில் மின்னோட்டம் i பற்றிய சமன்பாடு,

$$\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = \frac{1}{R} \cdot \frac{dE}{dt}$$

என்பதாகும். $E =$ ஒரு மாறிலி யென்றால், i ஐக் காண்கவும்.

3. மின்தடை R, மின்தூண்டம் L உள்ள மின்சுற்றில் மின்னோட்டம் i ஐப் பற்றிய சமன்பாடு,

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E\cos\omega t$$

என்பதாகும். E, ω மாறிலிகள் கால அளவு t-ல் i ஐக் காண்க.

4. மின்தடை R, மின் தேக்கம் C, மின்னழுத்தம் C உள்ள மின் சுற்றில், மின்னோட்டம் i ஐப் பற்றிய சமன்பாடு,

$$R\frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = \frac{dE}{dt}$$ என்பதாகும். $E = E_0 \cos\omega t$

(E_0, ω மாறிலிகள்)

$t = 0$ என்றபோது, $i = 0$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு, மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்கவும்.

(B. E. '65, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. C மின் தேக்கமுள்ள, மின் தேக்கி, மின் தடை R மூலம், நிலையான மின்னழுத்தம் V-யினால் மின்னூட்டப்பட்டிருக்கிறது.

மின்னூட்டம் q என்றால்,

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V$$ என்று நிறுவுக.

$t = 0$ என்றபோது $q = 0$ என்றால்,

$$q = CV\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$ என்றும்

மின்னோட்டம் $i = \frac{V}{R} e^{-\frac{t}{RC}}$ என்றும் நிறுவுக.

6. ஒரு மின் பக்க இணைப்புச்சுற்றில் (parallel circuit) ஒரு கிளையில் மின்தடை R, மின்தூண்டம் L இவையும் இரண்டாவது கிளையில் சமமான மின்தடை R-ம், மின் தேக்கம் C-ம் உள்ளன. மாறும் மின்னழுத்தம் $E\sin\omega t$ இரு கிளைகளிலும் மின்னோட்டங்கள் i_1, i_2 ஐ உண்டாக்குகிறது. ஆரம்பத்தில் மின்னோட்டம் ஏதுமில்லையென்றால், கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளிலிருந்து i_1, i_2 இவற்றைக் காண்க :

$$L\frac{di_1}{dt} + Ri_1 = E\sin\omega t$$

$$\frac{i_2}{C} + R\frac{di_2}{dt} = \omega E\cos\omega t$$

$R^2C = L$ என்ருல், மொத்த மின்னேட்டம்

$$i_1 + i_2 = \frac{E\sin\omega t}{R}$$

என்று நிறுவுக.

§ 40. வேதிப் பொறியியல் (Chemical Engineering) சம்பந்தப் பட்டசமன்பாடுகள்

$\frac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற வகைச் சமன்பாடுகள் வேதிப் பொறியியல் பற்றிய சில நிலைகளில் இடம் பெறுகின்றன. பின் வரும் எடுத்துக்காட்டு இதை நன்கு விளக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

50 பவுண்டு நிறையுள்ள உப்பு கரைத்து, மொத்தம் 100 காலன் உப்புநீர் ஒரு தொட்டியில் உள்ளது. காலனுக்கு 2 பவுண்டு உப்பு உள்ள நீர், நிமிடத்துக்கு 3 காலன் வீதம் அந்தத் தொட்டியில் ஊற்றப்படுகிறது. இந்தக்கலவை, தொட்டியிலிருந்து நிமிடத்துக்கு 2 காலன் வீதம் வெளியேறுகிறது. 30 நிமிடங்களுக்குப்பிறகு தொட்டியிலுள்ள உப்பு அளவு எவ்வளவு ?

கால அளவு t நிமிடங்களில்; தொட்டியில் உள்ள உப்பின் நிறை x பவுண்டுகள் என்றும், Δt நிமிடங்களில் உப்பின் நிறை ஏற்றம் Δx பவுண்டுகள் என்றும் கொள்வோம்.

$\therefore$ Δx = (தொட்டியின் உள்ளே வரும் உப்பின் அளவு)

—(வெளியே செல்லும் உப்பின் அளவு) ... (1)

ஒரு நிமிடத்தில் 3 காலன் உப்பு நேர் சேர்க்கப்படுகிறது. அதில் 6 பவுண்டு உப்புள்ளது.

$\therefore$ Δt நிமிடங்களில், $6\,\Delta t$ பவுண்டு உப்பு தொட்டிக்குள் சேர்க்கப்படுகிறது. ... ... (2)

நிமிடத்திற்கு 3 காலன் நீர் ஊற்றப்பட்டு, அதே சமயத்தில் 2 காலன் நீர் வெளியேறுகிறது.

∴ தொட்டியில் நீரின் அளவு நிமிடத்துக்கு 1 காலன் வீதம் அதிகரிக்கிறது. t நிமிடங்களில் அதிகரித்த நீரின் அளவு $= t$ காலன்கள்.

∴ மொத்த அளவு $= 100 + t$ காலன்கள். இவற்றில் x பவுண்டு உப்பு உள்ளது.

∴ 1 காலனுக்கு $\frac{x}{100+t}$ பவுண்டு உப்பு இருக்கிறது.

நிமிடத்திற்கு 2 காலன் உப்பு நீர் வெளியேறுவதால், $\frac{2x}{100+t}$ பவுண்டு உப்பு, ஒரு நிமிடத்தில் வெளியேறுகிறது.

∴ Δt நிமிடங்களில் வெளியேறும் உப்பு

$$= \frac{2x}{100+t} \Delta t \text{ பவுண்டுகள்} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2), (3) இவற்றை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\Delta x = 6\Delta t - \frac{2x}{100+t} \Delta t$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = 6 - \frac{2x}{100+t}$$

$$\underset{\Delta t \to 0}{dt} \frac{\Delta x}{\Delta t} = 6 - \frac{2x}{100+t}$$

$$\frac{dx}{dt} = 6 - \frac{2x}{100+t}$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} + \frac{2x}{100+t} = 6 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

இது, x-ல் நேரிய சமன்பாடு.

தொகையீட்டுக் காரணி

$$= e^{\int \frac{2}{100+t} dt}$$

$$= e^{2\log(100+t)} = (100+t)^2$$

(4) ஐ $(100 + t)^2$ ஆல் பெருக்கினால்,

$$\frac{d}{dt}\left[\, x(100 + t)^2 \,\right] = 6\,(100 + t)^2$$

தொகையிட்டால்,

$$x\,(100 + t)^2 = A + \int 6\,(100 + t)^2\,dt$$

$$= A + 2\,(100 + t)^3 \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

ஆரம்பத்தில் $t = 0$ என்றபோது, $x = 50$

$$\therefore \quad 50 \cdot 100^2 = A + 2 \cdot 100^3$$

$$A = 50 \cdot 100^2 - 2 \cdot 100^3$$

$$= 100^2\,(50 - 200) = -\,100^2 \cdot 150$$

$$\therefore \quad x\,(100 + t)^2 = -\,100^2 \cdot 150 + 2\,(100 + t)^3$$

$$x = -\,\frac{100^2 \cdot 150}{(110 + t)^2} + 2\,(100 + t) \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

$t = 30$ என்றால்,

$$x = -\,\frac{100^2 \cdot 150}{130 \cdot 130} + 2 \times 130$$

$$= 260 - 88 \cdot 76$$

$$= 171 \cdot 24 \text{ பவுண்டுகள்.}$$

பயிற்சிகள் 22

1. 60 பவுண்டு நிறையுள்ள உப்பைக் கரைத்து, மொத்தம் 100 காலன் உப்புநீர் ஒரு தொட்டியிலுள்ளது. காலனுக்கு 1 பவுண்டு உப்புள்ள நீர், நிமிடத்துக்கு 2 காலன் வீதம் அந்தத் தொட்டியில் ஊற்றப்படுகிறது. இந்தக்கலவை தொட்டியிலிருந்து நிமிடத்துக்கு 3 காலன் வீதம் வெளியேறுகிறது. 1 மணிக்குப் பிறகு தொட்டியிலுள்ள உப்பு அளவு எவ்வளவு ?

2. ஒரு தொட்டியில் 300 காலன்கள் நீர் உள்ளது. காலனுக்கு 2 பவுண்டு உப்புள்ள நீர் நிமிடத்துக்கு 3 காலன்கள் வீதம் அத்தொட்டியில் ஊற்றப்படுகிறது. இந்தக்கலவை அதே வேகத்தில் வெளியேறுகிறது. தொட்டியில் 200 பவுண்டு நிறையுள்ள உப்பு எப்போதிருக்கும் ?

(B. E. '63, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

3. ஒரு தொட்டியில் 50 காலன்கள் நீர் உள்ளது. காலனுக்கு 2 பவுண்டு உப்புள்ள நீர், நிமிடத்துக்கு 2 காலன்கள் வீதம் அந்தத்தொட்டியில் ஊற்றப்படுகிறது. இந்தக்கலவை அதே வேகத்தில் வெளியேறுகிறது. தொட்டியிலுள்ள உப்பின் நிறை 40 பவுண்டிலிருந்து 80 பவுண்டு வருவதற்கு எத்தனை நிமிடங்களாகும் ?

4. 500 பவுண்டு நிறையுள்ள உப்பைக் கரைத்து, மொத்தம் 100 காலன் உப்புநீர் உள்ள தொட்டியில், நிமிடத்திற்கு 10 காலன் வீதம் புதிய நீர் ஊற்றப்படுகிறது. இந்தக்கலவை அதே வேகத்தில், தொட்டியிலிருந்து வெளியேறுகிறது. தொட்டியிலுள்ள உப்பின் நிறை 50 பவுண்டாக எவ்வளவு நேரமாகும்?

§ 41. இரண்டாம் வகை இரசாயன வினைவுகள் (Second Order Chemical processes)

சில இரசாயன வினைவுகளில் A, B என்ற இரு பொருள்கள் கலந்து புதிய பொருள் C ஏற்படும். பொதுவாக A பொருளின் ஒரு மூலக்கூறு (molecule), B-ன் ஒரு மூலக்கூறுடன் சேர்ந்து, C-ன் ஒரு மூலக்கூறு உண்டாகும். ஆரம்பத்தில் A, B இவைகளின் மூலக்கூறுகளின் எண்ணிக்கை முறையே a, b என்றும், கால அளவு t-ல், C-ல் x மூலக்கூறுகள் ஏற்படுவதாகவும் கொள்வோம். இப்போது, A பொருளில் உள்ள மூலக்கூறுகள் $a-x$; B-ல் உள்ளவை $b-x$. இந்த இரசாயன வினையின் சமன்பாடு,

$$\frac{dx}{dt} = k\,(a-x)\,(b-x) \text{ என்பதாகும்.}$$

இங்கு k, ஒரு + ராசி. இந்த சமன்பாட்டின் தீர்வு கண்டு, x ஐ t சார்பில் விளக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு இரசாயன வினையில் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடு கிடைத்துள்ளது. $\frac{dx}{dt} = k\,(a-x)\,(b-x)$. k, a, b இவைகள் + மாறிலிகள். $t = 0$ என்றபோது $x = 0$ என்றால் x ஐக் காணவும்.

$$\frac{dx}{dt} = k\,(a-x)\,(b-x)$$

$$\therefore \frac{dx}{(a-x)\,(b-x)} = k\,dt \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{A}{a-x} + \frac{B}{b-x}$$ என்றால்.

$$1 \equiv A(b-x) + B(a-x).$$

$x = a,\ b$ என்ற மதிப்புகளை பிரதியிட்டால்,

$$1 = A(b-a); \quad 1 = B(a-b)$$

$$\therefore \quad A = \frac{1}{b-a}, \qquad B = \frac{1}{a-b}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{(a-x)(b-x)} = \frac{2}{(b-a)(a-x)} + \frac{1}{(a-b)(b-x)}$$

$\therefore$ (1)-லிருந்து,

$$\frac{1}{(b-a)(a-x)}\,dx + \frac{1}{(a-b)(b-x)}\,dx = k\,dt$$

தொகையிட்டால்,

$$-\frac{1}{b-a}\log(a-x) - \frac{1}{a-b}\log(b-x) = kt + C \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$t = 0,\ x = 0$ என்று (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$-\frac{1}{b-a}\log a - \frac{1}{a-b}\log b = C \qquad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

C-ன் மதிப்பை, (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$-\frac{1}{b-a}\log(a-x) - \frac{1}{a-b}\log(b-x)$$
$$= kt - \frac{1}{b-a}\log a - \frac{1}{a-b}\log b$$

$$\therefore \quad kt = \frac{1}{b-a}\log a - \frac{1}{b-a}\log(a-x) + \frac{1}{a-b}\log b$$
$$- \frac{1}{a-b}\log(b-x)$$

$$= \frac{1}{b-a}\log\frac{a}{a-x} + \frac{1}{a-b}\log\frac{b}{b-x}$$

$$= \frac{1}{a-b}\left[\log \frac{b}{b-x} - \log \frac{a}{a-x}\right]$$

$$= \frac{1}{a-b}\log\left(\frac{b}{b-x}\cdot\frac{a-x}{a}\right)$$

$$\therefore \quad (a-b)\,kt = \log \frac{b}{a}\left(\frac{a-x}{b-x}\right)$$

$$\frac{b}{a}\left(\frac{a-x}{b-x}\right) = e^{(a-b)\,kt}$$

$$\therefore \quad \frac{a-x}{b-x} = \frac{a}{b}\cdot e^{(a-b)\,kt}.$$

பயிற்சிகள் 23

1. ஒரு ரசாயன வினையில் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

$$\frac{dx}{dt} = k\,(na+x)\,(a-x)$$

இதிலிருந்து

$$kt = \frac{1}{a(n+1)}\log\frac{na+x}{a-x} + C$$ என்று நிறுவுக.

2. $\frac{dx}{dt} = k\,(a-x)^2$ என்ற இரசாயன சமன்பாட்டிலிருந்து $t=0$, $x=0$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு, $x = \frac{a^2\,kt}{1+a\,kt}$ என்று காண்பிக்கவும்.

3. $\frac{dx}{dt} = k\,(a-x)\,(b-x)^2$ என்ற இரசாயன சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$kt = \frac{1}{a-b}\left(\frac{1}{b-x} - \frac{1}{a-b}\log\frac{a-x}{b-x}\right) + c$$

என்று நிறுவுக.

4. $\frac{dx}{dt} = k\,(a-x)\,(b-x)\,(c-x)$ என்ற இரசாயன சமன்பாட்டுக்கு $t=0$, $x=0$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு,

தீர்வுகண்டு,

$$\left(1-\frac{x}{a}\right)^{c-b}\cdot\left(1-\frac{x}{b}\right)^{a-c}\cdot\left(1-\frac{x}{c}\right)^{b-a}$$

$$= e^{(c-b)(a-c)(b-a)kt}$$ என்று நிரூபிக்கவும்.

5. $\frac{dx}{dt} = k(a-x)^3$ என்ற இரசாயன சமன்பாட்டுக்கு $x = 0,\ t = 0$ என்ற நிபந்தனையின்கீழ் $kt = \frac{x(2a-x)}{2a^2(a-x)^2}$ என்று நிறுவுக.

6. கன உருளைகளில் உள்ள முக்கியம் (stress) p ஐக் கொடுக்கும் சமன்பாடு $r\frac{dp}{dr} + 2p = 2c$. இங்கு c ஒரு மாறிலி. p ஐ r-ன் சார்பில் கண்டுபிடிக்கவும்.

7. ஒரு கன உருளையில் இறுகும் அமுக்கம் (compressive stress) p, நீட்சி அமுக்கம் (tensile stress) f இவைகள் சேர்ந்த சமன்பாடு $r\frac{dp}{dr} + p + f = 0$ என்பதாகும்.

$f + ap = b$ (a, b மாறிலிகள்) என்னும் $r = r_1$ என்றபோது $p = p_1$, $r = r_2$ என்றபோது $p = 0$ என்றும் வைத்துக்கொண்டு

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{a-1} = 1 + \frac{p_1(1-a)}{b}$$ என்று நிறுவுக.

5. மாறிலி குணகங்களுடன்கூடிய நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(Linear differential equations with constant coefficients)

§ 42. ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட வரிசையுள்ள நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் :

§ 17-ல் முதல் வரிசை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டைப் பற்றி விவரணம் கொடுக்கப்பட்டது. இப்போது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட வரிசையுள்ள நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைக் கவனிப்போம். இந்த மாதிரி நேரிய சமன்பாடுகளில், சார்புடைய மாறியும் அதனுடைய ஏனைய வகைக்கெழுக்களும் முதல்படியிலிருக்கும். அவைகள் ஒன்றையொன்று பெருக்கிக்கொண்டு இருக்காது.

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = X \quad \dots \quad (1)$$

என்பது ஒரு n-ம் வரிசை, முதற்படி நேரியச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பாகும். இதில் வலப்புறத்திலுள்ள X-ம் குணகங்களாகிய $P_1, P_2, \dots, P_n$ யாவும் மாறிலிகள் அல்லது x-ன் சார்புகள். $P_1, P_2, \dots, P_n$ யாவும் மாறிலிகளாக இருந்தால், (1) ஐக் கீழ்க் கண்டவாறு எழுதலாம் :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = X \quad \dots \quad (2)$$

இது மாறிலி குணகங்களுடன் கூடிய நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு.

முதலில், வலது புறத்தில் $X = 0$ என்றுள்ள நேரிய சமன்பாட்டின் தீர்வை அறிவோம்.

§ 43. வலது புறம் பூச்சியமாகவுள்ள நேரியச் சமன்பாட்டின் தீர்வு :

தெளிவிற்காக $a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0$ ... (1)

என்ற a, b, c மாறிலிகள் குணகங்களாகவுடைய இரண்டாம் வரிசை நேரிய சமன்பாட்டை முதலில் எடுத்துக்கொள்வோம். $y = y_1$, $y = y_2$ என்ற இரு சார்புகள் தனியே (1)-க்குத் தீர்வாக பொருத்தமிருக்கிறதென்று வைத்துக்கொள்வோம். பின் $y = Ay_1 + By_2$ (A, B இரண்டும் யாதாமொரு மாறிலிகள்) என்பது சமன்பாடு (1)-ன் பொதுத் தீர்வாகும். இதைப் பின்வருமாறு நிரூபிக்கலாம்.

$y = y_1$, $y = y_2$ என்பவை தனியே (1)-க்குப் பொருத்தமாக இருப்பதால், y-க்குப் பதிலாக இவைகளைப் பிரதியிட்டால்,

$$a \frac{d^2 y_1}{dx^2} + b \frac{dy_1}{dx} + cy_1 = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

$$a \frac{d^2 y_2}{dx^2} + b \frac{dy_2}{dx} + cy_2 = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (3)$$

என்ற முடிவுகள் கிடைக்கின்றன.

இப்போது $y = Ay_1 + By_2$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy$$

$$= a \frac{d^2}{dx^2} (Ay_1 + By_2) + b \frac{d}{dx} (Ay_1 + By_2) + c (Ay_1 + By_2)$$

$$= A \left(a \frac{d^2 y_1}{dx^2} + b \frac{dy_1}{dx} + cy_1 \right) + B \left(a \frac{d^2 y_2}{dx^2} + b \frac{dy_2}{dx} + cy_2 \right)$$

$= A \times 0 + B \times 0$ [(2), (3) இவற்றைப் பயன்படுத்தி]

$= 0$

ஆகவே $y = Ay_1 + By_2$ என்பது (1)-க்குப் பொருத்தமாயிருக்கிறது. மேலும் (1)-ன் பொதுத் தீர்வில் இரண்டு மாறிலிகள் இடம் பெறவேண்டுமாதலால், $y = Ay_1 + By_2$, சமன்பாடு (1)-ன் பொதுத் தீர்வு என்பது திண்ணம்.

மேற்கண்ட முடிவு, n வரிசையுள்ள ஒரு சமன்பாட்டுக்கும் பொருந்தும். ஆகவே $y = y_1$, $y = y_2$, ... $y = y_n$ என்ற ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்ற (independent) சார்புகள் தனியே

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{d^n x^{-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

என்ற சமன்பாட்டுக்குத் தீர்வுகளாகப் பொருந்திஞல்,

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, + \dots + c_n y_n$$

என்பது மேற்படி சமன்பாட்டின் பொதுத் தீர்வாகும். இங்கு c_1, c_2, ... c_n என்பவை n மாறிலிகள்.

§ 44. வகையீட்டுச் செயலி (The Differential Operator)

வகையிடல் செய்கை $\frac{d}{dx}$ என்ற குறியீடு மூலம் குறிப்பிடப் படுகிறது. $\frac{d}{dx}$ என்பதற்குப் பதிலாக, ஒரே எழுத்து D என்பதை பயன்படுத்துவது நல்லது. ஆகவே D வகையீட்டுச் செயலி யாகும். அதாவது $D = \frac{d}{dx}$.

$$\therefore \quad Dy = \frac{dy}{dx}$$

Dy என்பதன் பொருள், D எனும் வகையீட்டுச் செயலி y எனும் சார்பின்மேல் இயங்குகிறது.

இவ்வாறே $D^2 y = \frac{d^2 y}{dx^2}$, $D^3 y = \frac{d^3 y}{dx^3}$, ...

பொதுவாக $D^n y = \frac{d^n y}{dx^n}$.

D என்பதை முதல் வகைக்கெழுச் செயலியென்றும்,

D^2ஐ இரண்டாவது வகைக்கெழுச் செயலியெனவும்,

D^n என்பதை n முறை வகைக்கெழுச் செயலியெனவும் கொள்ளலாம்.

முக்கிய குறிப்பு: Dy என்பதை ஒரு பெருக்கலாகக் கொள்ளக் கூடாது. D என்பதற்குத் தனி பொருள் ஏதுமில்லை. D ஒரு சார்பின்மேல் இயங்கும்போதுதான், பொருள், பெறுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக, $D(\sin x) = \cos x$

இப்போது $\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots \dots$
$$+ a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = 0$$

என்ற சமன்பாட்டை

$$D^n y + a_1 D^{n-1} y + a_2 D^{n-2} y + \dots + a_{n-1} Dy + a_n y = 0$$

அல்லது $(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots \dots$
$$+ a_{n-1} D + a_n) y = 0$$

அதாவது $f(D) y = 0$ என்று எழுதலாம்.

இங்கு $f(D) \equiv D^n + a_1 D^{n-1} + \dots \dots + a_{n-1} D + a_n$

$f(D)$ என்பது ஒரு தொடர்ச் செயலியை (group operator)க் குறிப்பிடுவதாகக் கொள்ளலாம்.

§ 45. வகையீட்டுச் செயலி Dஐப் பற்றியத் தேற்றங்கள்

D என்ற வகையீட்டுச் செயலி பல விஷயங்களில் ஒரு இயற் கணிதக்குறி (algebraical symbol) போல், இயங்குகிறது. இயற் கணிதத்தில் முக்கிய விதிகள் பின்வருமாறு :

(1) $m(a+b) = ma + mb$ பரவு விதி (distributive law)

(2) $ab = ba$ மாற்று விதி (commutative law)

(3) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ அடுக்குக்குறி விதி (index law)

இப்போது $D(u+v) = Du + Dv$

$D^m D^n u = D^{m+n} u$ (m, n + முழு எண்கள்)

என்ற முடிவுகள் நமக்குத் தெரியும். ஆகவே, மேற்கண்ட விதி களில் (1), (3) இவைகளுக்கு D என்ற குறி பொருத்தமாயிருக் கிறது.

மேலும் $D(ku) = k\, Du$ (இங்கு k ஒரு மாறிலி).

ஒரு மாறிலியைப் பொருத்து D மாற்று விதிக்கும் உட்பட்டிருக் கிறது. ஆகவே D ஐ இயற்கணிதக்குறி மாதிரியே கருதலா மென்று தெரிகிறது.

இப்போது $(D-a)(D-b)y$ என்ற கோவையை எடுத்துக் கொள்வோம். இது $\left(\frac{d}{dx} - a\right)\left(\frac{d}{dx} - b\right) y$ ஐக் குறிக்கிறது.

முதலில் $\frac{d}{dx} - b$ ஆல் y-ன் மேல் இயங்கும்போது $\frac{dy}{dx} - by$ என்ற முடிவு கிடைக்கிறது. இந்த முடிவின் மேல் $\frac{d}{dx} - a$ ஆல் இயங்கும்போது, $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx} - by\right) - a\left(\frac{dy}{dx} - by\right)$

அதாவது $\frac{d^2y}{dx^2} - (a+b)\frac{dy}{dx} + aby$ என்ற முடிவு கிடைக்கிறது.

அடுத்து $(D-b)(D-a)y$ என்ற கோவையையும் முன்மாதிரி விரித்தெழுதினால், $\frac{d^2y}{dx^2} - (a+b)\frac{dy}{dx} + aby$ என்ற அதே முடிவு தான் கிடைக்கும்.

மேலும் $[D^2 - (a+b)D + ab]y$ என்ற கோவையின் முடிவும் $\frac{d^2y}{dx^2} - (a+b)\frac{dy}{dx} + aby$ ஆகும்.

$\therefore \quad (D-a)(D-b) \equiv (D-b)(D-a) \equiv D^2 - (a+b)D + ab.$ மேற்கண்ட மூன்று தொடர் செயலிகளும் y என்ற ஏதாவது சார்பின்மேல் இயங்கும்போது, கிடைக்கின்ற முடிவுகள் ஒன்றேதான். ஆகவே ஒரு தொடர் செயலி, ஒரு சார்பின்மேல் இயங்கும்போது, **D** ஐ ஓர் இயற்கணிதக்குறி மாதிரி கருதி, அந்தத் தொடர் செயலியை காரணிகளாகப் பிரித்து, எந்த வரிசையிலாவது அந்தக் காரணிகளைக்கொண்டு சார்பின்மேல் இயங்கலாம்.

மேற்கண்டதில் a, b முதலியவைகள் மாறிலிகளென்பதை அறியவேண்டும்.

§ 46. $\frac{d^ny}{dx^n} + a_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_ny = 0$ **என்ற நேரிய சமன்பாட்டின் தீர்வு :**

§ 44-ல் விளக்கியபடி, கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை D குறியை உபயோகித்து,

$$(D^n + a_1D^{n-1}\ a_2D^{n-2} + \dots + a_{n-1}D + a_n)y = 0$$

அல்லது $f(D)y = 0$ ... ... (1)

என்று எழுதலாம்.

இங்கு $f(D) \equiv D^n + a_1D^{n-1} + \dots + a_{n-1}D + a_n$ ... (2)

என்ற தொடர் செயலியைக் குறிப்பிடும், D-ல் n படியுள்ள ஒரு பல்லுருப்புக் கோவையாக $f(D)$ இருக்கிறது. இயற்கணித விதி

களுக்கு D இணங்கியிருப்பதால், $f(D)$ ஐப் பொதுவாக n ஒருபடிக் காரணிகளாகப் பிரிக்கலாம்.

$$f(D) = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

என்ற இயற் கணித சமன்பாட்டுக்கு $m_1, m_2, \ldots m_n$ மூலங்களென்றால்,

$$f(D) \equiv (D - m_1)(D - m_2) \ldots (D - m_n) \ldots \quad (4)$$

ஆகவே சமன்பாடு (1) இப்போது.

$$(D - m_1)(D - m_2) \ldots (D - m_n)\, y = 0 \ \ldots \quad (5)$$

என்றாகும்.

இப்போது $(D - m_n)\, y = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$

என்ற முதல் வரிசை சமன்பாட்டின் தீர்வு $y = y_n$ என்று கொள்வோம்.

இந்தத் தீர்வை (6)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$(D - m_n)\, y_n = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

என்ற பொருத்தம் கிடைக்கிறது.

(7)-ன் இரு புறமும் $(D - m_1)(D - m_2) \ldots (D - m_{n-1})$ என்ற தொடர் செயலியால் இயங்கினால்,

$$\begin{aligned}(D - m_1)(D - m_2) \ldots (D - m_{n-1})(D - m_n)\, y_n \\ = (D - m_1)(D - m_2) \ldots (D - m_{n-1})\, 0\end{aligned}$$

$= 0$ என்று கிடைக்கிறது.

அதாவது $f(D)\, y_n = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$

(1) ஐயும் (8) ஐயும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால், $y = y_n$ என்ற தீர்வு சமன்பாடு (1) [அல்லது (5)]-க்கும் பொருத்தமென்று தெரிகிறது. அடுத்து, சமன்பாடு (6) ஐ விரித்தெழுதினால்,

$$\frac{dy}{dx} - m_n\, y = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$$

என்றாகும்.

இது y-ல் முதல் வரிசை நேரியச் சமன்பாடு.

தொகையீட்டுக் காரணி $= e^{-\int m_n\, dx} = e^{-m_n x}$

(9) ஐ $e^{-m_n x}$ ஆல் பெருக்கினல்,

$$\frac{d}{dx}\left(y e^{-m_n x}\right) = 0 \times e^{-m_n x} = 0$$

தொகையிட்டால்,

$$y e^{-m_n x} = \int 0 \, dx = c_n \text{ (மாறிலி)}$$

$$\therefore \quad y = c_n e^{m_n x} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (10)$$

[(10)-ல் வலப்புறத்திலுள்ள $c_n e^{m_n x}$ என்ற சார்புதான் y_n என்று முன்பு வைத்துக்கொள்ளப்பட்டது]

∴ (10)-ல் உள்ள தீர்வு சமன்பாடு (1)-க்குப் பொருத்தமாகும்.

இப்போது (4)-ல் உள்ள தொடர் செயலியின் காரணிகளை எந்த வரிசையிலும் எழுதலாமாதலால்,

$(D-m_1)\ y = 0$, $(D-m_2)\ y = 0$, ... என்பவற்றின் தீர்வுகளும் (1)-க்குப் பொருத்தமானவை.

அதாவது $y = c_1 e^{m_1 x}$, $y = c_2 e^{m_2 x}$, ... முதலியவை சமன்பாடு (1)-க்குத் தனித்தனியே பொருத்தமானவை.

∴ § 43-ல் விளக்கியபடி,

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + \dots + c_n e^{m_n x} \quad \dots \quad (11)$$

என்பது (1)-ன் பொதுத்தீர்வாகும். இதில் n மாறிலிகள் (c_1, c_2, ..., c_n) உள்ளன. m_1, m_2, ..., m_n முதலியவை $f(D) = 0$ என்ற இயற்கணித சமன்பாட்டின் மூலங்களாகும்.

$f(D) = 0$ என்பதற்கு துணைச் சமன்பாடு (auxiliary equation) என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$3\frac{d^2y}{dx^2}+10\frac{dy}{dx}-8y=0$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டை D குறியீட்டை உபயோகித்து,

$(3D^2+10D-8)\,y=0$ என்று எழுதலாம்.

$\therefore$ துணைச் சமன்பாடு

$$3D^2+10D-8=0$$
$$3D^2+12D-2D-8=0$$
$$3D\,(D+4)-2\,(D+4)=0$$
$$(D+4)\,(3D-2)=0$$
$$\therefore\quad D=-4,\ \frac{2}{3}$$

$\therefore$ § 46-ல் சொல்லியபடி, $m_1=-4,\ m_2=\frac{2}{3}$

$\therefore$ $y=c_1e^{-4x}+c_2e^{\frac{2}{3}x}$ என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$(D^3+2D^2-5D-6)\,y=0$$

துணைச் சமன்பாடு $f(D)\equiv D^3+2D^2-5D-6=0$

$D=-1$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$f(D)=-1+2+5-6=-7+7=0$$

$\therefore$ $D+1$ என்பது $f(D)$-ன் காரணி.

$$D^3+2D^2-5D-6=(D+1)\,(D^2+D-6)$$
$$=(D+1)\,(D+3)\,(D-2)$$

$\therefore$ துணைச் சமன்பாடு $(D+1)\,(D+3)\,(D-2)=0$

என்றாகும்.

$\therefore$ $D=-1,\ -3,\ 2$

$\therefore$ $y=Ae^{-x}+Be^{-3x}+Ce^{2x}$ என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

$t = 0$ எனும்போது $x = 0$, $\frac{dx}{dt} = 4$ என்ற நிபந்தனைக் குட்பட்டு $\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + 2x = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்க.

இங்கு t சார்பில் மாறி, x சார்புடை மாறி.

$\frac{d}{dt} = D$ என்ருல், கொடுத்துள்ள சமன்பாடு

$$(D^2 - 3D + 2)x = 0 \text{ என்ருகும்.}$$

துணைச்சமன்பாடு $D^2 - 3D + 2 = 0$

$$(D-1)(D-2) = 0$$

$$D = 1, 2.$$

$$\therefore \quad x = Ae^t + Be^{2t} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்பது பொதுத் தீர்வாகும்.

$$(1)\text{-லிருந்து,} \quad \frac{dx}{dt} = Ae^t + 2Be^{2t} \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$t = 0$ எனும்போது $x = 0$.

ஆகவே இந்த மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = A + B \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$t = 0$ எனும்போது $\frac{dx}{dt} = 4$.

இந்த மதிப்புகளை (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$4 = A + 2B \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$(4) - (3); \quad 4 = B$$

$$(3)\text{-லிருந்து,} \quad A = -B = -4$$

A, B இவற்றின் மதிப்புகளை (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$x = -4e^t + 4e^{2t}.$$

பயிற்சிகள் 24

தீர்வு காண்க :

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} - 24y = 0$

2. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - 54y = 0$

3. $(2D^2 + 5D - 12)y = 0$

4. $\frac{d^2y}{dx^2} - m^2y = 0$

5. $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy}{dx}$ (B. E. '59, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

6. $\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0$

7. $\frac{d^3y}{dx^3} - 13\frac{dy}{dx} + 12y - 0$

8. $\frac{d^3y}{dx^3} + 9\frac{d^2y}{dx^2} + 23\frac{dy}{dx} + 15y = 0$

9. $\frac{d^2y}{dx^2} + (a+b)\frac{dy}{dx} + aby = 0$

§ 47. வகைக்கெழுச் சமன்பாடும் துணைச் சமன்பாடும் :

வலது புறம் பூச்சியமாகவுள்ள மாறிலி குணகங்களுடன்கூடிய நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு $f(D)y = 0$ என்பதின் தீர்வு காண்க, அதற்குகந்த இயற்கணித சமன்பாடு $f(D) = 0$ என்பதை எழுதிக்கொள்ளவேண்டும். இதற்கு துணைச் சமன்பாடு எனப்பெயர். இதனுடைய மூலங்களிலிருந்து கொடுத்துள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வை அமைக்கலாம். துணைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களின் தன்மைக்குத் தகுந்தாற்போல், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு அமையும்.

§ 46-ல் துணைச் சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்களாகவும் ஒன்றுக்கொன்று வெவ்வேறானதாகவுமிருப்பதாகக் கொள்ளப்பட்டன. அவைகள் $m_1, m_2, \ldots, m_n$ என்றால்,

$$y = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x} + \ldots + c_n e^{m_nx}$$ என்பது பொதுத் தீர்வாகும்.

இனி, துணைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களுடைய மற்றத் தன்மைக்குத் தகுந்தாற்போல், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு அமையும் விதத்தை ஆராய்வோம்.

§ 48. துணைச் சமன்பாட்டின் மூலங்களில் சில மெய்யெண்களாகவும் சமமானவைகளாகவும் இருந்தால் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு :

$f(D) = 0$ என்ற துணைச் சமன்பாட்டின் $m_1, m_2, \dots, m_n$ என்ற n மூலங்களில் m_1, m_2 இரண்டும் சமமென்று கொள்வோம். அதாவது $m_2 = m_1$.

§ 46-ல் (11)-ல் குறிப்பிட்ட பொதுத்தீர்வு இப்போது,

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_1 x} + c_3 e^{m_3 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$$

என்றுகும். தோற்றத்தில் இதில் $c_1, c_2, \dots c_n$ என்ற n மாறிலிகள் இருந்தாலும், அவைகளெல்லாம் மாறுனவையல்ல.

மேற்கண்டதைச் சுருக்கினுல்,

$$y = (c_1 + c_2) e^{m_1 x} + c_3 e^{m_3 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$$

இதில் $c_1 + c_2$-க்குப் பதிலாக A என்ற ஒரு தனி மாறிலி பயனளிக்கக் கூடியது.

$\therefore \quad y = A e^{m_1 x} + c_3 e^{m_3 x} + \dots + c_n e^{m_n x}$ என்பதுதான் தீர்வு. இதில் $n - 1$ மாறிலிகள் அடங்கியிருக்கின்றன. ஆகவே இது பொதுத் தீர்வாகாது.

$f(D)\, y = 0$ என்ற சமன்பாட்டை,

$$(D - m_1)(D - m_2) \dots (D - m_n)\, y = 0$$

என்று எழுதலாமென்று ஏற்கெனவே அறிந்தோம். $m_2 = m_1$ என்ற நிலையில், வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$$(D - m_1)^2 (D - m_3) \quad (D - m_n)\, y = 0$$ என்றுகும்.

இதில் $(D - m_1)^2\, y = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$

என்ற கிளைச் சமன்பாட்டின் தீர்வை இப்போது நாம் ஆராய்ந்தால் போதுமானது.

சமன்பாடு (1) ஐ,

$$(D - m_1)(D - m_1)\, y = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

என்று எழுதலாம்.

இதில் $(D - m_1)\,y = u$ ... ... (3)
எனக் கொள்வோம்,

(3) ஐ (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$(D - m_1)\,u = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(4)-ன் தீர்வு § 46-ல் (9) வது சமன்பாட்டில் விளக்கியபடி,

$$u = c_2\,e^{m_1 x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

ஆகும்.

u-ன் இந்த மதிப்பை (3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$(D - m_1)\,y = c_2\,e^{m_1 x}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} - m_1 y = c_2\,e^{m_1 x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

இது y-ல் நேரியச் சமன்பாடு.

தொகையீட்டுக்காரணி $e^{-m_1 x}$ ஆல் (6) ஐப் பெருக்கினால்,

$$\frac{d}{dx}\left(y\,e^{-m_1 x}\right) = c_2\,e^{m_1 x}\,.\,e^{-m_1 x} = c_2$$

தொகையிட்டால்,

$$y\,e^{-m_1 x} = c_1 + \int c_2\,dx = c_1 + c_2\,x.$$

$$\therefore\ y = (c_1 + c_2 x)\,e^{m_1 x}.$$

ஆகவே, $c_1\,e^{m_1 x} + c_2\,e^{m_2 x}$ என்பதற்குப் பதிலாக, பொதுத் தீர்வில் $(c_1 + c_2 x)\,e^{m_1 x}$ என்ற பகுதி இடம் பெறுகிறது

∴ முழுப் பொதுத்தீர்வு

$$\boxed{y = (c_1 + c_2 x)\,e^{m_1 x} + c_3\,e^{m_3 x} + \ldots + c_n\,e^{m_n x}}$$

இதில் $c_1,\,c_2,\,\ldots\ \ldots\,c_n$ என்ற ஒன்றுக்கொன்று வெவ்வேறான n மாறிலிகள் உள்ளன.

இவ்வாறே, ஒரு துணைச்சமன்பாட்டில், மூன்று மூலங்கள் m_1, m_1, m_1 என்று சமமாக வரும்போது, அதற்குத் தகுந்தபடி $e^{m_1x}(c_1 + c_2x + c_3x^2)$ என்ற பகுதி, பொதுத்தீர்வில் இடம் பெறும்.

பொதுவாக, துணைச்சமன்பாட்டில் r மூலங்கள் $m_1, m_1, m_1, \ldots$ என்று சமமாக வரும்போது, அதற்குத் தகுந்தபடி,

$e^{m_1x}(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots \ldots + c_rx^{r-1})$ என்ற பகுதி பொதுத்தீர்வில் இடம் பெறும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$(D^2 - 6D + 9)y = 0$$

துணைச்சமன்பாடு $D^2 - 6D + 9 = 0$

$$(D - 3)(D - 3) = 0$$

$$D = 3, 3 \quad \text{(சமமான மூலங்கள்)}$$

$\therefore \quad y = e^{3x}(A + Bx)$ என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{d^4y}{dx^4} - \frac{d^3y}{dx^3} - 9\frac{d^2y}{dx^2} - 11\frac{dy}{dx} - 4y = 0.$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு

$$(D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4)y = 0$$

துணைச்சமன்பாடு

$$f(D \equiv D^4 - D^3 - 9D^2 - 11D - 4 = 0$$

$D = -1$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$f(-1) = 1 + 1 - 9 + 11 - 4 = 13 - 13 = 0$$

$\therefore \quad D + 1$ என்பது $f(D)$-ன் ஒரு காரணி.

$$\therefore \; f(D) = (D+1)\,(D^3 - 2D^2 - 7D - 4).$$
$$= (D+1)\,(D+1)\,(D^2 - 3D - 4)$$
$$= (D+1)\,(D+1)\,(D+1)\,(D-4)$$

$\therefore$ துணைச்சமன்பாடு $(D+1)\,(D+1)\,(D+1)\,(D-4)=0$

$D = -1,\ -1,\ -1,\ 4$

இதில் மூன்று மூலங்கள் -1 ஆகவும், நான்காவது மூலம் வேறாகவும் இருக்கின்றன.

$\therefore \; y = e^{-x}(c_1 + c_2x + c_3x^2) + c_4\,e^{4x}$ என்பது தீர்வாகும்.

பயிற்சிகள் 25

தீர்வு காண்க :

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = 0$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2a\dfrac{dy}{dx} + a^2y = 0$

3. $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)\,y = 0$

4. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$

5. $\dfrac{d^3x}{dx^3} + \dfrac{d^2y}{dx^2} - \dfrac{dy}{dx} - y = 0$

6. $\dfrac{d^3v}{dx^3} + \dfrac{d^2v}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 3y = 0$

7. $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{1}{C}q = 0$; $R^2 = 4\dfrac{L}{C}$ என்றால்

(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ;
B. E. '72, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

§ 49. துணைச்சமன்பாட்டின் மூலங்களில் சில, கற்பனை எண்களாக இருந்தால், வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு :

$f(D) = 0$ என்ற துணைச்சமன்பாட்டின் குணகங்கள் ($a_1, a_2, \ldots$ என்பவை) மெய்யெண்களாக இருப்பதால், அதனுடைய மூலங்களில் சில கற்பனை எண்களாக இருப்பின், அவைகள் இணைக் கற்பனையெண்களாக (conjugate imaginary numbers)

அமையவேண்டும். ஆகவே $m_1, m_2, \ldots, m_n$ என்ற மூலங்களில் m_1, m_2 கற்பனையெண்களென்றால், $m_1 = \alpha + i\beta$. $m_2 = \alpha - i\beta$ என்ற அமைப்பில் இருக்கவேண்டும். இங்கு $i = \sqrt{-1}$; α, β மெய்யெண்கள். m_1, m_2 இவைகள் வெவ்வேறாக இருப்பதால், § 46-ல் கூறியபடி,

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x} + c_3 e^{m_3 x} + \ldots + c_n e^{m_n x}$$

என்பது பொதுத்தீர்வாகும்.

இதில் m_1, m_2 சம்பந்தப்பட்ட பகுதியைமட்டும் எடுத்துக் கொண்டால்,

$$c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

$$= c_1 e^{(\alpha + i\beta)x} + c_2 e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$= c_1 e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x} + c_2 e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}$$

$$= c_1 e^{\alpha x} (\cos \beta x + i \sin \beta x) + c_2 e^{\alpha x} (\cos \beta x - i \sin \beta x)$$

($\because$ $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$ ஆய்லர் தேற்றப்படி)

$$= e^{\alpha x} \cos \beta x (c_1 + c_2) + e^{\alpha x} \sin \beta x \cdot i (c_1 - c_2)$$

$$= e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x)$$

[$c_1 + c_2 = A$, $i(c_1 - c_2) = B$ என்று A, B இரு புதிய மாறிலிகளைப் பயன்படுத்தி]

$$\therefore \boxed{y = e^{\alpha x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x) + c_3 e^{m_3 x} + \ldots + c_n e^{m_n x}}$$

என்பது முழு பொதுத்தீர்வாகும்.

இதில் $A, B, c_3, \ldots c_n$ என்ற ஒன்றுக்கொன்று வெவ்வேறான n மாறிலிகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு,

$$(D^2 + D + 1)y = 0$$

துணைச்சமன்பாடு,

$$D^2 + D + 1 = 0$$

$$\therefore \quad D = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = \alpha \pm i\beta$$

$$\alpha = -\frac{1}{2}, \; \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x \right)$$

என்பது தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 2:

தீர்வு காண்க :

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 2\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - 8y = 0$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு,

$$(D^3 - 2D^2 + 4D - 8)y = 0$$

துணைச்சமன்பாடு,

$$D^3 - 2D^2 + 4D - 8 = 0$$

$$D^2(D-2) + 4(D-2) = 0$$

$$(D-2)(D^2+4) = 0$$

$$D = 2; \quad D^2 = -4$$

$D^2 = -4$-லிருந்து, $D = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

$\therefore \quad D = 2,\ 0 + 2i,\ 0 - 2i$ என்பவை மூலங்கள்.

$$\therefore \quad y = Ae^{2x} + e^{0 \cdot x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$$

$= Ae^{2x} + B\cos 2x + C\sin 2x$ என்பது தீர்வாகும்.

பயிற்சிகள் 26

தீர்வு காண்க :

1. $(D^2 - 2D + 2)\,y = 0$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 8\dfrac{dy}{dx} + 25y = 0$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\lambda\dfrac{dy}{dx} + (\lambda^2 + \mu^2)\,y = 0$

(B. E. '57, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0;\quad x = 0,\ \ y = 2;\quad x = \dfrac{\pi}{2},$

$y = -2$ என்ற நிபந்தனைகுட்பட்டு

5. $(D^2 + 16)\,y = 0$

6. $(D^3 + D^2 - 2D + 12)\,y = 0$

7. $(D^3 + 7D^2 + 16D + 10)\,y = 0$

8. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 3\dfrac{d^2y}{dx^2} - 4y = 0$

9. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - m^4y = 0$

10. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + m^4y = 0$

11. $\dfrac{d^4y}{dx^4} + 13\dfrac{d^2y}{dx^2} + 36y = 0$

12. $y'''(x) + 4y''(x) + 13y'(x) = 0$

(B. E. '72, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

13. $y'''(x) + 2y''(x) + 4y'(x) + 8y = 0$

(B. E. '70, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

§ 50. துணைச்சமன்பாட்டின் மூலங்களில் சில, கற்பனையெண்களாகவும், சமமாகவுமிருந்தால் வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு :

$f(D) = 0$ என்ற துணைச்சமன்பாட்டின் $m_1, m_2, \ldots\ m_n$ என்ற மூலங்களில் m_1, m_2 இரண்டும் இணைக்கற்பனையெண்களாக $m_1 = \alpha + i\beta,\ m_2 = \alpha - i\beta$ என்றபடி இருக்கட்டும். மேலும்

$m_3 = m_1$, $m_4 = m_2$ என்றாக இருக்கட்டும். அதாவது m_1, m_1; m_2, m_2 என்ற இருசோடி சமமான மூலங்களிருப்பதால்,

§ 48-ல் விளக்கியபடி,

$$\text{தீர்வு} \quad y = (c_1 + c_2 x)\, e^{m_1 x} + (c_3 + c_4 x)\, e^{m_2 x}$$

$$+ c_5\, e^{m_5 x} + \dots + c_n\, e^{m_n x} \text{ ஆகும்.}$$

இதில் m_1, m_2 சார்பந்தப்பட்ட பகுதியைமட்டிலும் u என்று எடுத்துக்கொண்டால்,

$$u = (c_1 + c_2 x)\, e^{(\alpha + i\beta)x} + (c_3 + c_4 x)\, e^{(\alpha - i\beta)x}$$

$$= e^{\alpha x}\Big[(c_1 + c_2 x)(\cos \beta x + i \sin \beta x)$$

$$+ (c_3 + c_4 x)(\cos \beta x - i \sin \beta x)\Big]$$

$$= e^{\alpha x}\Big[\cos \beta x\{(c_1 + c_3) + (c_2 + c_4)x\}$$

$$+ i \sin \beta x\{(c_1 - c_3) + (c_2 - c_4)x\}\Big]$$

இதில் $c_1 + c_3 = A$, $c_2 + c_4 = B$, $i(c_1 - c_3) = C$, $i(c_2 - c_4) = D$ என்று நான்கு புதிய மாறிலிகளை பிரதியிட்டால்,

$$u = e^{\alpha x}[(A + Bx)\cos Bx + (C + Dx)\sin \beta x]$$

$$\therefore \boxed{y = e^{\alpha x}[(A + Bx)\cos \beta x + (c + Dx)\sin \beta x] + c_5 e^{m_5 x} + \dots + c_n e^{m_n x}}$$

என்பது பொதுத்தீர்வாகும். இதில் A, B, C, D $c_5, \dots c_n$ என்ற ஒன்றுக்கொன்று வெவ்வேறான n மாறிலிகள் உள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + 8\frac{d^2 y}{dx^2} + 16 y = 0$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு,

$$(D^4 + 8D^2 + 16)\, y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு,

$$D^4 + 8D^2 + 16 = 0$$

$$(D^2 + 4)(D^2 + 4) = 0$$

$$D^2 = -4, -4$$

$$\therefore \quad D = \pm\sqrt{-4}, \pm\sqrt{-4}$$

$$= 0 \pm 2i, 0 \pm 2i$$

மூலங்கள் கற்பனையெண்களாகவும், சமமாகவும்மிருக்கின்றன.

∴ § 50 ஐப் பயன்படுத்தி,

$$y = e^{0x}[(A + Bx)\cos 2x + (c + Dx)\sin 2x]$$

$$= (A + Bx)\cos 2x + (C + Dx)\sin 2x$$

என்பது தீர்வாகும்.

பயிற்சிகள் 27

தீர்வு காண்க :

1. $(D^4 + 2D^2 + 1)y = 0$
2. $(D^4 + 4D^3 + 8D^2 + 8D + 4)y = 0$
3. $(D^4 + 2D^3 + 3D^2 + 2D + 1)y = 0$

§ 51. வலது புறம் பூச்சியமில்லாமல், x-ன் சார்பு X உள்ள ஒரு நேரிய சமன்பாட்டின் தீர்வு:

தெளிவிற்காக, $a\dfrac{d^2y}{dx^2} + b\dfrac{dy}{dx} + cy = X$ ... (1)

என்ற சமன்பாட்டை முதலில் எடுத்துக்கொள்வோம்.

இதில் a, b, c மாறிலிகள் X, x-ன் சார்பு.

முதலில் $a\dfrac{d^2y}{dx^2} + b\dfrac{dy}{dx} + cy = 0$ ... (2)

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்போம்.

இதற்குத் தகுந்த துணைச்சமன்பாட்டை எழுதி, § 46, § 48, § 49 இவற்றில் குறிப்பிட்ட ஒருவகைப் பிரகாரம் (2)-ன் தீர்வு காண இயலும்.

$y = Y$ ... (3) என்பது (2)-ன் தீர்வாகக் கொள்வோம்.

Y என்ற சார்பில் இரு மாறிலிகள் கட்டாயமாக இடம் பெறும்.

$y = Y$ என்பது (2)-க்குப் பொருத்தமாக இருப்பதால்,

$$a \frac{d^2 Y}{dx^2} + b \frac{dY}{dx} + c\,Y = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

அடுத்து, $y = u$ என்ற சார்பு (1)-ன் ஒரு சிறப்புத் தீர்வாக (particular integral) இருக்கட்டும். அதாவது u என்பது யாதொரு மாறிலிகளுமில்லாமல் சாதாரணமாக (1)-க்குப் பொருத்தமாயுள்ள, x அடங்கிய ஒரு சார்பு.

$\therefore$ (1)-ல் $y = u$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$a \frac{d^2 u}{dx^2} + b \frac{du}{dx} + cu = X \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

(4), (5) இவைகளைக் கூட்டினால்,

$$a \frac{d^2}{dx^2} (Y + u) + b \frac{d}{dx} (Y+u) + c\,(Y+u) = X \ldots (6)$$

(1), (6) இவைகளை ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

$y = Y + u$ என்பது சமன்பாடு (1)-க்குப் பொருத்தமாகத் தெரிகிறது. Y-ல் இரு மாறிலிகள் இருப்பதாலும், u-ல் மாறிலியொன்றும் இல்லாததாலும் $Y + u$ என்பதில் இரு மாறிலிகள் கட்டாயமாக உள்ளன.

$\therefore$ $y = Y + u$ என்பது சமன்பாடு (1)-ன் பொதுத் தீர்வாகும்.

அடுத்து, பொதுவாக

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1} \frac{dy}{dx} + a_n y = X$$

அதாவது $f(D)\,y = X$ ... ... (7)

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

முதலில் $f(D)\,y = 0$ ... ... (8)

என்ற சமன்பாட்டின் பொதுத்தீர்வு $y = Y$ எனக் கொள்வோம்.

Y-ல் n மாறிலிகள் அடங்கியிருக்கும்.

$y = Y$ என்பது (8)-க்குப் பொருத்தமாக இருப்பதால்,

$$f(D)\,Y = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$$

அடுத்து யாதொரு மாறிலிகளும் இல்லாமல்,

$y = u$ என்ற சார்பு (7)-ன் சிறப்புத் தீர்வாக இருக்கட்டும்.

$$\therefore \quad f(D)\,u = X \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (10)$$

(9), (10) இவைகளைக் கூட்டினால்,

$$f(D)\,(Y + u) = X \quad \ldots \quad \ldots \quad (11)$$

(7), (11) இரண்டையும் ஒப்பிட்டுப் பார்த்தால்,

$y = Y + u$ என்ற சார்பு (7)-க்குப் பொருத்தமாக இருக்கிறது. மேலும் Y-ல் n மாறிலிகளிருப்பதாலும் u-ல் யாதொரு மாறிலியுமில்லாததாலும், $Y + u$ என்பதில் n மாறிலிகள் கட்டாயமாக உள்ளன.

$\therefore \quad y = Y + u$ என்பது சமன்பாடு (7)-ன் பொதுத் தீர்வாகும்.

ஆகவே சமன்பாடு (7)-ன் தீர்வை, இரு பகுதிகளாகக் கண்டு பிடிக்கிறோம். முதலில் $y = Y$ என்ற சார்பு சமன்பாடு (8)-ன் பொதுத்தீர்வாகும். சமன்பாடு (7)ஐ வலப்புறத்தில் பூச்சியம் வைத்து அமைத்தால், சமன்பாடு (8) கிடைக்கும். ஆகவே (8)-க்கு ஒடுக்கிய சமன்பாடு (reduced equation) என்று பெயர். இதனுடைய தீர்வை, அதாவது, Yஐ §46, §48, §49-ல் குறிப்பிட்ட முறைகளில் கண்டுபிடிக்கலாம். அடுத்து, சமன்பாடு (7)க்கு $y = u$ என்ற சிறப்புத்தீர்வை நாம் கண்டுபிடிக்க வேண்டும். இரண்டையும் கூட்டினால், $y = Y + u$ என்று முழு பொதுத்தீர்வு கிடைக்கும்.

Y என்பதைத் துணைத்தீர்வு (complementary function) என்று u என்பதை சிறப்புத்தீர்வு (particular integral) என்றும் குறிப்பிடுவோம்.

§52. ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வைப்பற்றி நன்கு அறிந்துகொள்ள, சில எடுத்துக்காட்டுகள் பயனளிக்கும்.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 10x + 15 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

y-க்குப் பதிலாக (1)-ல், மாறிலிகள் இல்லாத ஒரு சார்பை பிரதியிட்டு, பொருத்தமிருப்பின், அந்த சார்பு (1)-ன் ஒரு சிறப்புத் தீர்வாகும். இங்கு $y = 10x + 5$ என்ற சார்பு (1)-க்குப் பொருத்தமாயிருக்கிறது. ஆகவே $y = 10x + 5$ என்பது (1)-க்கு சிறப்புத் தீர்வாகும். இதில் ஒரு மாறிலியுமில்லை என்பதைக் கவனிக்கவேண்டும்.

அடுத்து $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{2x}$ ... ... (2)

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம். இதற்கு $y = \frac{e^{2x}}{20}$ என்பது சிறப்புத் தீர்வாகும். இதை கண்டுபிடிப்பதற்கு, வலப் புறத்தல் e^{2x} இருப்பதாலும் e^{2x}-ன் வகைக்கெழுக்கள் $e^{2x}X$ ஏதாவதொரு மாறிலியாக அமைவதாலும், $y = Ae^{2x}$ ... (3) என்பதை (2)-ன் சிறப்புத் தீர்வாகக்கொள்வோம்

(3)-லிருந்து $\frac{dy}{dx} = 2Ae^{2x}, \frac{d^2y}{dx^2} = 4Ae^{2x}$

இவற்றை (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$4Ae^{2x} + 5 \times 2Ae^{2x} + 6Ae^{2x} = e^{2x}$$

$$20Ae^{2x} = e^{2x}$$

$$\therefore \quad 20A = 1 \quad \text{அல்லது} \quad A = \frac{1}{20}$$

$\therefore$ (3)-லிருந்து $y = \frac{1}{20}e^{2x}$ என்பது சிறப்புத் தீர்வாகும்.

துணைத் தீர்வு கண்டுபிடிக்கும் முறை முன்பு விளக்கப்பட்டது. இனி பின்வரும் பகுதிகளில் சிறப்புத் தீர்வைக் காணும் முறைகளை ஆராய்வோம்

§ 53. தலைகீழ் வகையீட்டுச் செயலி (The inverse operation $\frac{1}{D}$)

D என்ற வகையீட்டுச் செயலி. ஒரு சார்பின்மேல் இயங்கினால், அந்த சார்பின் வகைக்கெழு கிடைக்கும். $\frac{1}{D}$ என்பதை தலைகீழ் வகையீட்டுச் செயலியாகக் கருதுவோம். அதாவது, D என்ற செயலி ஒரு சார்பின்மேல் இயங்கிக்கொடுக்கும் முடிவுக்கு எதிரான

முடிவை $\frac{1}{D}$ என்ற செயலி அதே சார்பின்மேல் இயங்கும்போது கொடுக்கும். ஆகவே $\frac{1}{D}$ என்ருல் தொகையிடல் என்று பொருளாகிறது.

Du என்ருல் $\frac{d}{dx}(u)$ என்றும், $\frac{1}{D}(u)$ என்ருல், $\int u\,dx$ என்றும் கொள்ளலாம். இவ்வாறே, $\frac{1}{D}$ என்ருல் இருமுறை தொகையிடல் என்று ஆகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$D(x^5) = 5x^4$$

$$D^2(x^5) = 20x^3$$

$$\frac{1}{D}(x^5) = \int x^5\,dx = \frac{x^6}{6}$$

$$\frac{1}{D^2}(x^5) = \int\int x^5\,(dx)^2 = \int \frac{x^6}{6}\,dx = \frac{x^7}{42}$$

இப்போது,

$$\frac{1}{D^2}\,D^2(x^5) = \frac{1}{D^2}(20x^3)$$

$$= \int\int 20x^3\,(dx)^2$$

$$= \int 20\,\frac{x^4}{4}\,dx$$

$$= x^5$$

$$D^2\,\frac{1}{D^2}\,x^5 = D^2\left(\frac{x^7}{42}\right)$$

$$= D\left(\frac{7x^6}{42}\right)$$

$$= \frac{7 \times 6x^5}{42} = x^5$$

$$\therefore\quad D^2\,\frac{1}{D^2}(x^5) = x^5 = \frac{1}{D^2}\,D^2(x^5)$$

ஆகவே ஒரு சார்பின் மேல், வகையீட்டுச் செயலியும் அதே தலைகீழ் வகையீட்டுச் செயலியும் சேர்ந்தாற்போல் எந்த வரிசையில் இயங்கினாலும், சார்பு மாறாது. இதை பொதுவாக கீழ்வருமாறு தெரிவிக்கலாம்.

$$f(D)\frac{1}{f(D)}u = u = \frac{1}{f(D)}f(D)\,u$$

இங்கு $f(D)$ என்பது ஒரு தொடர் வகையீட்டுச் செயலி.

§54. சிறப்புத் தீர்வின் குறியீட்டு விளக்கம் (Symbolic expression for the Particular Integral)

$$(D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \ldots + a_{n-1} D + a_n)\,y = X$$

அதாவது $f(D)\,y = X$ ... ... (1)

என்ற சார்புக்கு சிறப்புத் தீர்வு $y = u$ என்றால்,

$$f(D)\,u = X \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்றும் பொருந்தும்.

(2)-ன் இரு பக்கங்களிலும் $\frac{1}{f(D)}$ என்ற தலைகீழ் தொடர் செயலியால் இயங்கினால்,

$$\frac{1}{f(D)}f(D)\,u = \frac{1}{f(D)}X$$

அதாவது $u = \frac{1}{f(D)}X$ ... ... (3)

(3) ஐ சிறப்புத்தீர்வு u-ன் குறியீட்டு விளக்கமாகக் கருதலாம். இவ்வாறு எழுதும்போது, தொடர் செயலி $\frac{1}{f(D)}$ என்பது X-க்கு முன்பு எழுதப்படவேண்டும்.

(3) ஐ $u = X \cdot \frac{1}{f(D)}$ என்று எழுதக்கூடாது. ஏனெனில், $f(D)$ என்பதற்குத் தனி பொருள் கிடையாது.

$u = \frac{1}{f(D)} \cdot X$ என்று எழுதும்போது, X ஐ $f(D)$ வகுத்து வரும் ஈவு u. என்பது பொருள் அல்ல. u என்ற சார்பின்மேல் $f(D)$ இயங்கினால் X கிடைக்குமென்பதை, தலைகீழ் முறையில்,

$\frac{1}{f(D)}$ என்ற தொடர் செயலி X-ன்மேல் இயங்கினால் u கிடைக்கும் என்பதே (3)-ன் விளக்கம்.

§ 55. சிறப்புத்தீர்வு காண சில குறிப்பிட்ட முறைகள் :

$f(D)y = X$ என்ற சமன்பாட்டில், X-ன் அமைப்பைப் பொருத்து சிறப்புத் தீர்வுகள் காண சில பிரத்தியேகமான வழிகளிருக்கின்றன. கீழ்க்கண்ட வகைகளுக்கிணங்க, சிறப்புத்தீர்வு காணும் முறைகளை நாம் அடுத்து வரும் பகுதிகளில் ஆராய்வோம்.

(a) $X = x^k$ என்ற அமைப்பு, (k ஒரு + முழு எண்)

(b) $X = e^{\alpha x}$ (α ஒரு மாறிலி)

(c) $X = \sin \alpha x$ அல்லது $\cos \alpha x$

(d) $X = e^{\alpha x} . V(x)$

(e) $X = x . V(x)$

} இந்த இரண்டிலும் $V(x)$ ஏதேனுமொரு சார்பு.

§ 56. சமன்பாட்டின் வலப்புறத்தில் x^k (k ஒரு + முழு எண்) என்ற உறுப்புக்குத் தகுந்தபடி சிறப்புத் தீர்வு:

$f(D)y = x^k$ என்ற சமன்பாட்டுக்கு சிறப்புத்தீர்வு

$$u = \frac{1}{f(D)} x^k \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இந்த முடிவைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு,

$$\frac{1}{f(D)} \text{ ஐ } \left[\text{ அதாவது, } \{f(D)\}^{-1} \right]$$

இயற்கணித விதிகளின்படி, D-ன் மேற்பட்ட படிகளில் விரித்து எழுதலாம். அம்மாதிரி கிடைத்துள்ள $D, D^2, \ldots$ அடங்கிய கோவையின் உறுப்புக்களைக் கொண்டு, x^k-ன் மேல் இயங்கினால் முடிவு கிடைக்கும். $\frac{1}{f(D)} = \left[f(D)\right]^{-1}$ ஐ D-ன் மேற்படிகளில் விரித்து எழுதும்போது, k படிக்கு மேலுள்ள உறுப்புகளை விட்டு விடலாம். ஏனெனில் அவ்வுறுப்புக்கள் x^k-ன் மேல் இயங்கும் போது, பூச்சியம் தான் கிடைக்கும்.

$\left[f(D)\right]^{-1}$ என்பதின் விரித்தலைக்கண்டு பிடிக்க, ஈருறுப்புத் தேற்றத்தை (binomial theorem) உபயோகப்படுத்தலாம். கீழ்க் காணும் சில முக்கிய விரித்தல்களை நினைவில் கொள்ளுதல் நல்லது.

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \infty$$
$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \infty$$
$$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \infty$$
$$(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^2 + \dots \infty$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$(D^2 + D + 1)\, y = x^2$$

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + D + 1)\, Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு,

$$D^2 + D + 1 = 0$$

$$\therefore\quad D = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad Y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + D + 1)\, u = x^2$$

$$\therefore\quad u = \frac{1}{D^2 + D + 1}\, x^2$$

$$= \frac{1}{1 + (D + D^2)}\, x^2$$

$$= \left[1 + (D + D^2)\right]^{-2} x^2$$

$$= [1 - (D + D^2) + (D + D^2)^2 - \dots]\, x^2$$

$$= (1 - D - D^2)\, x^2) \quad \Big[\text{இந்த விரித்தலில் } D^2\text{-க்கு மேற்பட்ட D-ன் படிகள் தேவையில்லை}\Big]$$

$$= (1 - D)\, x^2$$

$$= 1\, x^2 - D\,(x^2)$$

$$= x^2 - 2x$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= e^{-\frac{1}{2}x}\left(A \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + B \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$(D^4 - 2D^3 + D^2)\, y = x$$

(B. E. '64, ஒஸ்மேனியா பல்கலைக்கழகம்)

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^4 - 2D^3 + D^2)\, Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு

$$D^4 - 2D^3 + D^2 = 0$$

$$D^2 (D^2 - 2D + 1) = 0$$

$$D^2 (D - 1)(D - 1) = 0$$

$\therefore$ $D = 0,\ 0,\ 1,\ 1$ என்று இரு சோடி, சம மூலங்கள்.

$$\therefore \quad Y = e^{0 \cdot x}\,(A + Bx) + e^{1 \cdot x}\,(C + Dx)$$

$$= A + Bx + c^{x}\,(C + Dx)$$

சிறப்புத்தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(L^4 - 2D^3 + D^2)\, u = x$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{D^4 - 2D^3 + D^2}\,(x)$$

$$= \frac{1}{D^2\,(1 - 2D + D^2}\,(x)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1-(2D-D^2)\right]^{-1}(x)$$

$$= \frac{1}{D^2}\left[1+(2D-D^2)+\cdots\right](x)$$

$$= \frac{1}{D^2}(1+2D)x$$

$$= \frac{1}{D^2}(x+2)$$

$$= \frac{1}{D^2}\cdot\frac{1}{D}(x+2)$$

$$= \frac{1}{D}\int(x+2)\,dx$$

$\left(\because \frac{1}{D}\right.$ என்பது தொகையீட்டுச் செயலி$\left.\right)$

$$= \frac{1}{D}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)$$

$$= \frac{x^3}{6}+x^2$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= A + Bx + e^x(c + Dx) + \frac{x^3}{6} + x^2$$

முக்கியக் குறிப்பு :

u ஐக் கண்டுபிடிப்பதற்கு முதலில் $\frac{1}{D^2}$ ஆல் x மீது இயங்கலாம். அப்போது,

$$u = \frac{1}{(1-2D+D^2)}\cdot\frac{1}{D^2}x$$

$$= \frac{1}{1-2D+D^2}\cdot\frac{1}{D}\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$\left(\because \frac{1}{D}\right.$ என்பது தொகையீட்டுச் செயலி$\left.\right)$

$$= \frac{1}{1-2D+D^2}\left(\frac{x^3}{6}\right)$$

$$= (1 - D)^{-2} \left(\frac{x^3}{6}\right)$$

$$= (1 + 2D + 3D^2 + 4D^3) \frac{x^3}{6}$$

$$= \frac{x^3}{6} + 2 \cdot \frac{3x^2}{6} + 3 \cdot \frac{6x}{6} + 4 \cdot \frac{6}{6}$$

$$= \frac{x^3}{6} + x^2 + 3x + 4$$

இவ்வழியில் சிறப்புத் தீர்வில் $3x + 4$ என்ற இரு உறுப்புக்கள் கூடுதலாகக் கிடைக்கின்றன.

இப்போது, பொதுத் தீர்வு

$$y = A + Bx + e^{x}(C+Dx) + \frac{x^3}{6} + x^2 + 3x + 4$$

அதாவது $y = (A+4) + (B+3)x + e^{x}(C+Dx) + \frac{x^3}{6} + x^2$

$$= A_1 + B_1x + e^{x}(C+Dx) + \frac{x^3}{6} + x^2$$

($A + 4$ என்பதை A_1 என்றும் $B + 3$ என்பதை B_1 என்றும் இரு புதிய மாறிலிகள்மூலம் குறிக்கலாம்).

இரு வழிகளிலும் கிடைத்த y-ன் அமைப்பு முடிவில் ஒன்றாகத்தான் இருக்கிறது. ஆகவே இரண்டாம் வழி மூலம் கிடைத்த சிறப்புத்தீர்விலுள்ள $3x + 4$ என்ற அதிகப்படி உறுப்புக்களுக்கு முக்கியத்துவம் இல்லையெனலாம்.

இம்மாதிரி நிலைகளில் u ஐக் கண்டுபிடிப்பதற்கு, $\frac{1}{D}$ என்ற செயலியைக் கடைசியாக வைத்து இயக்குவது என்பதை பொதுவாகக் கடைப்பிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 8y = x^4 + 2x + 1$$

துணைத் தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க, $(D^3 + 8)\ Y = 0$

துணைச் சமன்பாடு $D^3 + 8 = 0$

$$(D + 2)(D^2 - 2D + 4) = 0$$

$D + 2 = 0$ அல்லது $D^2 - 2D + 4 = 0$

$\therefore$ $D = -2$ அல்லது $D = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2}$

$$D = -2, \quad D = 1 \pm i\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad Y = Ae^{-2x} + e^{x}(B\cos\sqrt{3}\,x + C\sin\sqrt{3}\,x)$$

சிறப்புத்தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^3 + 8)\,u = x^4 + 2x + 1$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{D^3 + 8}(x^4 + 2x + 1)$$

$$= \frac{1}{8\left(1 + \frac{D^3}{8}\right)}(x^4 + 2x + 1)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 + \frac{D^3}{8}\right)^{-1}(x^4 + 2x + 1)$$

$$= \frac{1}{8}\left[1 - \frac{D^3}{8} + \left(\frac{D^3}{8}\right)^2 - \dots\right](x^4 + 2x + 1)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1 - \frac{D^3}{8}\right)(x^4 + 2x + 1)$$

$$= \frac{1}{8}\left[1\,(x^4 + 2x + 1) - \frac{1}{8}D^3(x^4 + 2x + 1)\right]$$

$$= \frac{1}{8}\left[x^4 + 2x + 1 - \frac{1}{8}\cdot 24x\right]$$

$$= \frac{1}{8}(x^4 - 3x + 1)$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= Ae^{-2x} + e^{x}(B\cos\sqrt{3}\,x + C\sin\sqrt{3}\,x) + \frac{1}{8}(x^4 - 3x + 1)$$

பயிற்சிகள் 28

தீர்வு காண்க:

1. $(D^2 - 4D + 3)\,y = x^2$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} + y = x^2$

3. $(D^2 - 1)\,y = 2 + 5x$

(B. E. '44, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

4. $(D^2 + 9)\,y = x^2$

B. E. '70, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 3y = x - 2x^2$

6. $(D^3 + 3D^2 + 2D)\,y = x^2$

7. $(D^3 + D^2 + D + 1)\,y = 2x^3 + 3x^2 - 4x + 5$

(B. E. '44, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

8. $(D^3 - D^2 - D + 1)\,y = 1 + x^2$

(B. E. '45, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்;
B. E. '66, வெங்கடேசா பல்கலைக்கழகம்)

9. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - a^4y = x^4$

§ 57. சமன்பாட்டின் வலப்புறத்தில் $e^{\alpha x}$ (α ஒரு மாறிலி) என்ற உறுப்புக்குத் தகுந்தபடி சிறப்புத் தீர்வு :

$e^{\alpha x}$-க்குத் தொடர்ச்சியாக வகைக்கெழு காணின்,

$$D(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x},\quad D^2(e^{\alpha x}) = \alpha^2 e^{\alpha x},$$

$$D^3(e^{\alpha x}) = \alpha^3 e^{\alpha x},\ \ldots\ \ldots$$

பொதுவாக $D^n(e^{\alpha x}) = \alpha^n e^{\alpha x}$

$$\therefore\ f(D)\, e^{\alpha x} = (D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \dots + a_{n-1} D + a_n)\, e^{\alpha x}$$

$$= \alpha^n e^{\alpha x} + a_1 \alpha^{n-1} e^{\alpha x} + a_2 \alpha^{n-2} e^{\alpha x} + \dots + a_{n-1} \alpha e^{\alpha x} + a_n e^{\alpha x}$$

$$= (\alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + a_2 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1} \alpha + a_n)\, e^{\alpha x}$$

$$= f(\alpha) \cdot e^{\alpha x} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இரு பக்கமும் $\frac{1}{f(D)}$ என்ற தலைகீழ்த் தொடர் செயலியால் இயங்கினால்,

$$\frac{1}{f(D)} f(D)\, e^{\alpha x} = \frac{1}{f(D)} f(\alpha)\, e^{\alpha x}$$

அதாவது $$e^{\alpha x} = \frac{1}{f(D)} f(\alpha)\, e^{\alpha x} \quad \dots \quad (2)$$

இங்கு $f(\alpha)$ என்பது α அடங்கிய ஒரு சார்பு.

ஆகவே அது ஒரு மாறிலி.

$f(\alpha)$-ன் மதிப்பு பூச்சியமில்லையென்றால், (2)-ன் இரு பக்கங்களையும் $f(\alpha)$ ஆல் வகுத்தால் கிடைப்பது,

$$\frac{1}{f(\alpha)}\, e^{\alpha x} = \frac{1}{f(D)}\, e^{\alpha x}$$

$$\therefore\ \boxed{\frac{1}{f(D)}\, e^{\alpha x} = \frac{1}{f(\alpha)} e^{\alpha x},\ f(\alpha) \neq 0 \text{ என்றால்}}$$

(சூத்திரம்-I)

சூத்திரம் I-லிருந்து $\frac{1}{f(D)} e^{\alpha x}$ என்பதின் முடிவு காண, D-க்குப் பதிலாக தொடர் செயலி சார்பில் α பிரதியிட்டால் போதுமென்று தெரிகிறது. ஆனால் இந்த சூத்திரம் $f(\alpha) \neq 0$ என்ற நிலையில்

தான் பொருந்தும். $f(\alpha) = 0$ என்றால் $\frac{1}{f(\alpha)} e^{\alpha x}$ என்பது முடிவிலி (infinity) ஆகும். இந்த நிலையில் சிறப்புத் தீர்வு கண்டு பிடிக்கும் முறையைப்பற்றி அடுத்த பகுதியில் ஆராய்வோம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$(D^2 - 7D + 12)\, y = e^x$$

துணைத் தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 - 7D + 12)\, Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு

$$D^2 - 7D + 12 = 0$$

$$(D - 4)(D - 3) = 0$$

$$\therefore \quad D = 4, 3$$

$$\therefore \quad Y = Ae^{4x} + Be^{3x}$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 - 7D + 12)\, u = e^x$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{D^2 - 7D + 12}\, e^x$$

$$= \frac{1}{1 - 7 + 12}\, e^x$$ (சூத்திரம் I ஐப் பயன்படுத்தி, D-க்குப் பதிலாக 1 பிரதியிட்டால்)

$$= \frac{1}{6}\, e^x$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= Ae^{4x} + Be^{3x} + \frac{e^x}{6}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y + 2\cos hx = 0$$

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு

$$(D^2 + 4D + 5)\, y = -\, 2 \cos h\, x$$

துணைத் தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 4D + 5)\, y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு

$$D^2 + 4D + 5 = 0$$

$$D = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} = -2 \pm i$$

$$\therefore \quad Y = e^{-2x}(A \cos x + B \sin x)$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 4D + 5)\, u = -\, 2 \cos h\, x$$

$$= -\, 2\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = -\, e^x - e^{-x}$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{D^2 + 4D + 5}(-e^x - e^{-x})$$

இதன் முடிவை இரு பகுதிகளாகக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

$$u_1 = \frac{1}{D^2 + 4D + 5}(-\, e^x)$$

$$= -\frac{1}{1 + 4 + 5}\, e^x, \quad D\text{-க்குப் பதிலாக } 1 \text{ பிரதியிட்டு}$$

$$= -\frac{e^x}{10}$$

$$u_2 = \frac{1}{D^2 + 4D + 5}(-\, e^{-x})$$

$$= -\frac{1}{1-4+5} e^{-x},$$

D-க்குப் பதிலாக -1 பிரதியிட்டு

$$= -\frac{1}{2} e^{-x}$$

$\therefore \quad u = u_1 + u_2$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு

$$y = Y + u_1 + u_2$$

$$= e^{-2x}(A\cos x + B\sin x) - \frac{e^x}{10} - \frac{e^{-x}}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்வு காண்க :

$$(D^2 + 4D + 4)\,y = 4e^{2x} - 7x^3$$

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 4D + 4)\;Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு]

$$D^2 + 4D + 4 = 0$$

$$(D+2)(D+2) = 0$$

$$D = -2,\ -2$$

$$\therefore \quad Y = e^{-2x}(A + Bx)$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 4D + 4)\,u = 4e^{2x} - 7x^3$$

$4e^{2x}$-க்குத் தகுந்த சிறப்புத் தீர்வு

$$u_1 = \frac{1}{D^2 + 4D + 4}(4e^{2x})$$

$$= \frac{1}{4+8+4}\, 4e^{2x}$$ (D-க்குப் பதிலாக 2 பிரதியிட்டு)

$$= \frac{e^{2x}}{4}$$

$-7x^3$-க்குத் தகுந்த சிறப்புத் தீர்வு

$$u_2 = \frac{1}{D^2 + 4D + 4}(-7x^3)$$

$$= \frac{1}{4\left(1 + D + \frac{D^2}{4}\right)}(-7x^3)$$

$$= -\frac{7}{4}\left[1 + \left(D + \frac{D^2}{4}\right)\right]^{-1}(x^3)$$

$$= -\frac{7}{4}\left[1 - \left(D + \frac{D^2}{4}\right) + \left(D + \frac{D^2}{4}\right)^2 - \left(D + \frac{D^2}{4}\right)^3 + \dots\right]x^3$$

$$= -\frac{7}{4}\left[1 - D - \frac{D^2}{4} + D^2 + \frac{2D^3}{4} - D^3\right]x^3$$

$$= -\frac{7}{4}\left(1 - D + \frac{3D^2}{4} - \frac{D^3}{2}\right)x^3$$

$$= -\frac{7}{4}\left(x^3 - 3x^2 + \frac{3}{4} \times 6x - \frac{1}{2} \times 6\right)$$

$$= -\frac{7}{4}\left(x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - 3\right)$$

∴ பொதுத் தீர்வு

$$y = Y + u_1 + u_2$$

$$= e^{-2x}(A + Bx) + \frac{e^{2x}}{4} - \frac{7}{4}\left(x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - 3\right)$$

பயிற்சிகள் 29

தீர்வு காண்க :

1. $(D^2 - 5D + 6)y = e^{4x}$
2. $(D^2 + 2D + 1)y = 2e^{3x}$

3. $(D^2 + 2D + 2)\, y = 3 + 2e^x$

(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

4. $(D^2 + D + 2)\, y = e^{-2x} + 5$

(B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. $(D^2 + 2p\,D + p^2 + q^2)\, y = e^{ax}$

6. $(D^2 + 4D + 8)\, y = (1 + e^x)^2$

(B. E. '65, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{3x}$; $x = 0$, $x = \log 2$

என்ற இரு மதிப்புகளுக்கும் $y = 0$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு

8. $(D^3 - 2D^2 - 5D + 6)\, y = e^{4x}$

9. $(D^3 - 3D^2 + 4)\, y = e^{3x}$

(B. E. '58, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

10. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 2\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + x^2 + x$

(B. E. '65, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

11. $(D^4 + D^2 + 1)\, y = ax^2 + be^{-x}$

12. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2k\dfrac{dy}{dx} + k^2y = e^x$

§58. $\dfrac{1}{f(D)}e^{\alpha x}$ என்ற சிறப்புத் தீர்வு: விலக்கு வகை (exceptional case).

$\dfrac{1}{f(D)}e^{\alpha x} = \dfrac{1}{f(\alpha)}e^{\alpha x}$ என்ற சூத்திரம், $f(\alpha)$ பூச்சியமாக இல்லாத நிலையில்தான் பயனளிக்கும். $f(\alpha) = 0$ என்றால், இந்த சூத்திரத்தை உபயோகப்படுத்தி, சிறப்புத் தீர்வைக் காண இயலாது. $f(\alpha) = 0$ என்றால், $f(D) = 0$ என்ற துணைச் சமன்பாட்டுக்கு α ஒரு மூலமாகிறது. ஆகவே $e^{\alpha x}$ என்பதில் உள்ள α என்ற ராசி. துணைச் சமன்பாட்டின் மூலமாக வரக்கூடுமானால், மேற்கண்ட சூத்திரத்தை உபயோகப்படுத்தி, சிறப்புத் தீர்வு காணமுடியாது. இம்மாதிரி விலக்கு வகைகளில், சிறப்புத் தீர்வைக் கண்டுபிடிக்க வேறு வழியைப் பின்பற்ற வேண்டும்.

$\frac{1}{D-\alpha} e^{\alpha x}$ என்ற செய்கையின் முடிவை சூத்திரம் I ஐக் கொண்டு, D-க்குப் பதிலாக α பிரதியிட்டு. கண்டுபிடிக்க முடியாது. இதனுடைய முடிவை u என்று கொள்வோம்.

அதாவது $u = \frac{1}{D-\alpha} e^{\alpha x}$

இருபக்கமும் $D - \alpha$ ஆல் இயக்கினுல்,

$$(D-\alpha)u = e^{\alpha x}$$

$$\frac{du}{dx} - \alpha u = e^{\alpha x} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இது u-ல் ஒரு நேரிய சமன்பாடு,

இதற்கு தொகையீட்டுக் காரணி $= e^{-\int \alpha dx} = e^{-\alpha x}$

(1) ஐ $e^{-\alpha x}$ ஆல் பெருக்கினுல்,

$$\frac{d}{dx}\left(ue^{-\alpha x}\right) = e^{\alpha x} \cdot e^{-\alpha x} = 1$$

தொகையிட்டால்,

$$ue^{-\alpha x} = \int 1\, dx$$

$$= x.$$

(இங்கு வலது புறத்தில் தொகையிட்டபின், ஒரு மாறிலியைச் சேர்க்கவில்லை. ஏனெனில் u-ன் சாமானிய அமைப்புதான் நமக்குத் தேவை)

$$\therefore \quad u = xe^{\alpha e}$$

அதாவது $\boxed{\frac{1}{D-\alpha} e^{\alpha x} = xe^{\alpha x}}$

இம்மாதிரியே,

$$\frac{1}{(D-\alpha)^2} e^{\alpha x} = \frac{1}{D-\alpha} \cdot \frac{1}{D-\alpha} e^{\alpha x}$$

$$= \frac{1}{D-\alpha}\left(x e^{\alpha x}\right) = v \text{ என்போம்.}$$

$$\therefore \quad (D-\alpha)v = xe^{\alpha x}$$

$$\frac{dv}{dx} - \alpha v = xe^{\alpha x} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இது v-ல் நேரிய சமன்பாடு. இதற்கும் தொகையீட்டுக் காரணி $e^{-\alpha x}$.

(2) ஐ $e^{-\alpha x}$ ஆல் பெருக்கினால்,

$$\frac{d}{dx}\left(ve^{-\alpha x}\right) = xe^{\alpha x} \cdot e^{-\alpha x} = x$$

∴ தொகையிட்டால்,

$$ve^{-\alpha x} = \int x\,dx = \frac{x^2}{2}$$

$$v = \frac{x^2}{2}e^{\alpha x}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{1}{(D-\alpha)^2}e^{\alpha x} = e^{\alpha x}\cdot\frac{x^2}{2}}$$

இவ்வாறே,

$$\frac{1}{(D-\alpha)^3}e^{\alpha x} = e^{\alpha x}\cdot\frac{x^3}{3!}$$

பொதுவாக,

$$\boxed{\frac{1}{(D-\alpha)^r}e^{\alpha x} = e^{\alpha x}\cdot\frac{x^r}{r!}} \quad \text{சூத்திரம் (II)}$$

இந்த சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, $f(\alpha) = 0$ என்ற நிலையில் $\frac{1}{f(D)}e^{\alpha x}$-ன் முடிவைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

பின் வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் இம்முறையை நன்கு விளக்கும்

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$(D^2 - 5D + 6)\,y = e^{3x}$$

துணைத் தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க, $(D^2 - 5D + 6)\,Y = 0$

துணைச் சமன்பாடு $D^2 - 5D + 6 = 0.$

$$(D-3)(D-2) = 0$$

$$D = 3,\ 2$$

$$\therefore \quad Y = Ae^{3x} + Be^{2x}$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 - 5D + 6)\,u = e^{3x}$$

$$u = \frac{1}{D^2 - 5D + 6}\,e^{3x}$$

$$= \frac{1}{(D-3)(D-2)}\,e^{3x}$$

$$= \frac{1}{D-3} \cdot \frac{1}{D-2}\,e^{3x}$$ (சூத்திரம் I ஐப் பயன்படுத்தி D-க்குப பதிலாக 3 ஐப் பிரதியிட்டு)

$$= \frac{1}{D-3}\,e^{3x}$$

$$= e^{3x} \cdot x.$$ (சூத்திரம் II ஐப் பயன்படுத்தி)

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= Ae^{3x} + Be^{2x} + xe^{3x}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$(D^2 - 4D + 4)\,y = e^{2x}$$

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 - 4D + 4)\,Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு $D^2 - 4D + 4 = 0$

$$(D-2)(D-2) = 0$$

$$D = 2, 2$$

$$\therefore \quad Y = e^{2x}(A + Bx)$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 - 4D + 4)u = e^{2x}$$

$$u = \frac{1}{D^2 - 4D + 4} e^{2x}$$

$$= \frac{1}{(D-2)^2} e^{2x}$$

$$= e^{2x} \cdot \frac{x^2}{2}$$ (சூத்திரம் II ஐப் பயன்படுத்தி)

பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= e^{2x}(A + Bx) + \frac{x^2}{2} e^{2x}$$

பயிற்சிகள் 30

தீர்வு காண்க :

1. $(3D^2 + D - 14)y = 13e^{2x}$
2. $(D^2 - 2D + 1)y = e^x$
3. $(D^2 - 2mD + m^2)y = e^{mx}$
4. $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$

   (B. E. '70, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)
5. $(D^2 - 6D + 9)y = e^{3x}$

   (B. E. '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)
6. $(D^2 + 5D + 6)y = 3e^{-2x} + e^{3x}$

   (B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. $\frac{d^2y}{dx^2} - 6\frac{dy}{dx} + 9y = \left(1 + e^{x^3}\right)$

8. $(D^2 - 13D + 36)\,y = e^{-4x} + \sinh x$

(B. E. '69, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

9. $(D^2 - 3D + 2)\,y = e^{x}$;

$x = 0$ என்றபோது $y = 3$, $Dy = 3$ என்ற நிபந்தனைகளின் கீழ்

10. $\frac{d^3y}{d\lambda^3} + \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - y = \cosh x$

11. $(D^3 - 12D + 16)\,y = \left(e^{x} + e^{-2x}\right)^2$

(B. E. 44', சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

12. $(D^3 - 1)\,y = \left(e^{x} + 1\right)^2$

(B. E. '64, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

13. $(D^3 - 7D^2 + 16D - 12)\,y = 2e^{3x} - 12x^2 + 20x - 10$

(B. E. '45, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

§ 59. சமன்பாட்டின் வலப்புறத்தில் $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$ (α ஒரு மாறிலி) என்ற உறுப்புகளுக்குத் தரும் சிறப்புத் தீர்வு.

$\sin \alpha x$-க்குத் தொடர்ச்சியாக வகைக்கெழு காணின்,

$$D(\sin \alpha x) = \alpha \cos \alpha x$$

$$D^2(\sin \alpha x) = -\alpha^2 \sin \alpha x \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$D^3(\sin \alpha x) = -\alpha^3 \cos \alpha x$$

$$L^4(\sin \alpha x) = \alpha^4 \sin \alpha x$$

அல்லது $(D^2)^2 \sin \alpha x = (-\alpha^2)^2 \sin \alpha x \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$$D^5(\sin \alpha x) = \alpha^5 \cos \alpha x$$

$$D^6(\sin \alpha x) = -\alpha^6 \sin \alpha x$$

அல்லது $(D^2)^3 \sin \alpha x = (-\alpha^2)^3 \sin \alpha x \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

(1), (2), (3) இவற்றிலிருந்து பொதுவாகக் கிடைப்பது

$(D^2)^n \sin dx = (-\alpha^2)^n \sin \alpha dx$ என்ற விதி.

$\phi(D^2)$ என்பது D^2-ல் ஒரு விகித முழுச்சார்பு (rational integral function) என்றால்,

$$\phi(D^2) \sin \alpha x = \phi(-\alpha^2) \sin \alpha x \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(4)-ன் இருபக்கங்களின் மேல் $\frac{1}{\phi(D^2)}$ ஆல் இயங்கினால்,

$$\frac{1}{\phi(D^2)} \cdot \phi(D^2) \sin \alpha x = \frac{1}{\phi(D^2)} \cdot \phi(-\alpha^2) \sin \alpha x$$

அதாவது $$\sin \alpha x = \frac{1}{\phi(D^2)} \cdot \phi(-\alpha^2) \sin \alpha x \quad \ldots \quad (5)$$

இங்கு $\phi(-\alpha^2)$ என்பது ஒரு சாதாரண பெருக்குமெண். அதன் மதிப்பு பூச்சியமில்லை யென்றால், (5)-ன் இரு பக்கங்களையும் $\phi(-\alpha^2)$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{1}{\phi(-\alpha^2)} \sin \alpha x = \frac{1}{\phi(D^2)} \sin \alpha x.$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{1}{\phi(D^2)} \sin \alpha x = \frac{1}{\phi(-\alpha^2)} \sin \alpha x, \quad \phi(-\alpha^2) \neq 0}$$

இவ்வாறே,

$$\boxed{\frac{1}{\phi(D^2)} \cos \alpha x = \frac{1}{\phi(-\alpha^2)} \cos \alpha x, \quad \phi(-\alpha^2) \neq 0}$$

சூத்திரம் (III)

சூத்திரம் (III)-லிருந்து $\frac{1}{\phi(D^2)} \frac{\sin}{\cos} \alpha x$ என்பவற்றின் முடிவு காண்பதற்கு, D^2-க்குப் பதிலாக, தொடர் செயலி சார்பில், D^2-க்குப் பதிலாக $-\alpha^2$ பிரதியிட்டால் போதுமென்று தெரிகிறது. இந்த சூத்திரம் $\phi(-\alpha^2) \neq 0$ என்ற நிலையில் தான் பொருந்தும்.

மேற்கண்ட சூத்திரத்திலிருந்து, இன்னும் பொதுவாக

$$\frac{1}{\phi(D^2)} \sin(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\phi(-\alpha^2)} \sin(\alpha x + \beta)$$

$$\frac{1}{\phi(D^2)} \cos(\alpha x + \beta) = \frac{1}{\phi(-\alpha^2)} \cos(\alpha x + \beta)$$

என்ற முடிவுகளும் நமக்குக் கிடைக்கின்றன.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வுகாண்க :

$$(D^2 - 4D - 5)\,y = \sin 4x$$

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 - 4D - 5)\,Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு.

$$D^2 - 4D - 5 = 0$$

$$(D - 5)(D + 1) = 0$$

$$D = 5, -1$$

$$\therefore \quad Y = Ae^{5x} + Be^{-x}$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 - 4D - 5)\,u = \sin 4x$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{D^2 - 4D - 5} \sin 4x.$$

$$= \frac{1}{-16 - 4D - 5} \sin 4x$$ [இங்கு $\alpha = 4$, $\alpha^2 = 16$. $D^2 = -16$ என்று சூத்திரம் III-ன் படி, பிரதியிடுகிறோம்]

$$= -\frac{1}{(21 + 4D)} \sin 4x$$

இப்போது, தொடர் செயலியில், D^2 மட்டும் அடங்கிய உறுப்புக்களை நாம் கொண்டு வரவேண்டும்.

ஆகவே மேலும் கீழும் இணை செயலியால் பெருக்கவேண்டும்.

$$\therefore \quad u = -\frac{(21 - 4D)}{(21 + 4D)(21 - 4D)} \sin 4x$$

$$= -\frac{(21 - 4D)}{441 - 16D^2} \sin 4x$$

$$= -\frac{(21 - 4D)}{441 - 16 \times - 16} \sin 4x$$

$$= -\frac{(21 - 4D)}{697} \sin 4x$$

$$= -\frac{1}{697}\left[21 \sin 4x - 4 \times 4 \cos 4x\right]$$

$$= -\frac{1}{697}(21 \sin 4x - 16 \cos 4x)$$

∴ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= Ae^{3x} + Be^{-x} - \frac{1}{697}(21 \sin 4x - 16 \cos 4x)$$

எடுத்துக்காட்டு 2:

தீர்வு காண்க.

$$(D^3 + D^2 - D - 1)y = \cos 2x$$

துணைத் தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க. $(D^3 + D^2 - D + 1)Y = 0$

துணைச் சமன்பாடு $D^3 + D^2 - D - 1 = 0$

$$D^2(D + 1) - 1(D + 1) = 0$$

$$(D + 1)(D^2 - 1) = 0$$

$$(D + 1)(D + 1)(D - 1) = 0$$

$$D = -1, -1, 1$$

$$\therefore \quad Y = e^{-x}(A + Bx) + Ce^{x}$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க.

$$(D^3 + D^2 - D - 1)u = \cos 2x$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{D^3 + D^2 - D - 1}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{D \cdot D^2 + D^2 - D - 1}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{D \cdot (-4) - 4 - D - 1}\cos 2x \text{ (சூத்திரம் III ஐப் பயன்படுத்தி)}$$

$$= \frac{1}{-5D - 5}\cos 2x$$

$$= \frac{1}{-5(D+1)} \cos 2x$$

$$= \frac{(D-1)}{-5(D+1)(D-1)} \cos 2x$$

$$= \frac{(D-1)}{-5(D^2-1)} \cos 2x$$

$$= \frac{(D-1)}{-5(-4-1)} \cos 2x$$

$$= \frac{1}{25}(-2 \sin 2x - \cos 2x)$$

$$= -\frac{(2 \sin 2x + \cos 2x)}{25}$$

∴ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= e^{-x}(A + Bx) + Ce^{x} - \frac{(2 \sin 2x + \cos 2x)}{25}$$

குறிப்பு : சிறப்புத்தீர்வு கண்டுபிடிக்க, $D^3 = D^2 \cdot D$ என்று எழுதி D^2-க்கு மட்டிலும் -4 என்று பிரதியிட்டோம். அதேபோல் செயலியில் D^4 என்ற உறுப்பிருந்தால், அதை $(D^2)^2$ என்று எழுதிக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்வு காண்க ;

$$(D^2 + 5D - 6)\, y = \sin 4x \sin x$$

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 5D - 6)\, Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு,

$$D^2 + 5D - 6 = 0$$

$$(D + 6)(D - 1) = 0$$

$$D = -6, 1$$

$$\therefore \quad Y = Ae^{-6x} + Be^{x}$$

சிறப்புத்தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 5D - 6)\, u = \sin 4x \sin x$$

$$u = \frac{1}{D^2 + 5D - 6} \sin 4x \sin x$$

இப்போது, திரிகோணப் பெருக்கல் சூத்திரம் உபயோகித்து, வலப்பக்கத்திலுள்ள சார்பலன்களின் பெருக்கலை ஒரு கூட்டல் அல்லது வித்தியாசமாக மாற்றலாம். சூத்திரப்படி,

$$2 \sin 4x \sin x = \cos(4x - x) - \cos(4x + x)$$
$$= \cos 3x - \cos 5x$$

$$\therefore \quad \sin 4x \sin x = \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 5x)$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{D^2 + 5D - 6} \cdot \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos 5x)$$

$$u_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{D^2 + 5D - 6} \cos 3x$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-9 + 5D - 6} \cos 3x$$

(D^2-க்குப் பதிலாக -9 பிரதியிட்டு)

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5D - 15} \cos 3x$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{D - 3} \cos 3x$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{D + 3}{D^2 - 9} \cos 3x$$

$$= \frac{1}{10} \cdot \frac{D + 3}{(-9 - 9)} \cos 3x$$

$$= -\frac{1}{180}(-3 \sin 3x + 3 \cos 3x)$$

$$u_2 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{D^2 + 5D - 6} \cos 5x$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-25 + 5D - 6} \cos 5x$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5D - 31} \cos 5x$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{5D + 31}{25D^2 - 961} \cos 5x$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(5D + 31)}{25 \times -25 - 961} \cos 5x$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(-25 \sin 5x + 31 \cos 5x)}{-1586}$$

$$= \frac{1}{3172} (-25 \sin 5x + 31 \cos 5x)$$

∴ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u_1 + u_2$

$$= Ae^{-6x} + Be^{x} - \frac{1}{180} (-3 \sin 3x + 3 \cos 3x)$$

$$+ \frac{1}{3172} (-25 \sin 5x + 31 \cos 5x)$$

பயிற்சிகள் 31

தீர்வு காண்க :

1. $(D^2 + D + 1) y = \sin 2x$
(B. E. '65, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $(D^2 + 2D + 1) y = \cos x$

3. $(D^2 + 9) y = \cos 2x + 3$

4. $(3D^2 + D - 14) y = 8 e^{2x} + \cos 5x$
(B. E. '50, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. $(D^2 + 3D + 2) y = \sin x + x^2$ (B. E. '51)

6. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = e^{x} + \cos x$
(B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 2y = x + \cos x$
(B. E. '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

8. $(D^2 + 4) y = \sin 3x + x^2$
(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

9. $(D^2 + 3D + 2) y = e^{-2x} + \sin x$
(B. E. '69, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

10. $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 5\cos x;$

$x = 0$ என்றபோது, $y = 0 = \frac{dy}{dx}$

என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு

11. $(D^4 + D^3 + D^2)y = 5x^2 + \cos x$ (B. E. '51)

12. $(D^4 + 2Dn^2 + n^4)y = \cos mx$
(B. E. '51, அண்ணுமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

13. $(D^3 - 3D^2 + 4D - 2)y = e^x + \cos x$
(B. E. '66, 70. சென்னைப் பல்கலைக்கழகம் ;
B. E. '54, அண்ணுமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

14. $(D^2 - 4D + 3)y = \sin 3x \cos 2x$
(B. E. '58, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

15. $(D^3 + D^2 - D - 1)y = \cos^2 x + e^{3x}$
(B. E. '54, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

16. $(D^3 + 1)y = \sin 3x - \cos^2 \frac{x}{2}$
(B. E. '64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

17. $\frac{d^3y}{dx^3} + y = \cos 2x$

18. $(D^3 - 4D^2 + 13D)y = 1 + \cos 2x$
(B. E. '65, வெங்கடேசாப் பல்கலைக்கழகம்)

§60. $\frac{1}{\phi(D^2)}\sin \alpha x$, $\frac{1}{\phi(D^2)}\cos \alpha x$ என்ற சிறப்புத் தீர்வுகள் : விலக்கு வகைகள்.

$\frac{1}{\phi(D^2)}\sin \alpha x = \frac{1}{\phi(-\alpha^2)}\sin \alpha x$ என்ற சூத்திரம், $\phi(-\alpha^2)$ பூச்சியமில்லாத நிலையில்தான் பயனளிக்கும். $\phi(-\alpha^2) = 0$ என்ருல், இந்த சூத்திரத்தை உபயோகப்படுத்தி, சிறப்புத்தீர்வு காண இயலாது இந்த நிலையில் சிறப்புத்தீர்வைக் கண்டுபிடிக்க வேறு வழியை பின்பற்றவேண்டும்.

$\frac{1}{D^2 + \alpha^2}\sin \alpha x$ அல்லது $\frac{1}{D^2 + \alpha^2}\cos \alpha x$ என்ற செய்கையின் முடிவை, சூத்திரம் III வழியாக, D^2-க்குப் பதிலாக $-\alpha^2$

பிரதியிட்டு கண்டுபிடிக்க முடியாது. இவற்றின் முடிவுகளை முறையே v, u என்று கொள்வோம்.

$$u = \frac{1}{D^2 + \alpha^2} \cos \alpha x$$

$$v = \frac{1}{D^2 + \alpha^2} \sin \alpha x$$

$$\therefore \quad u + iv = \frac{1}{D^2 + \alpha^2} (\cos \alpha x + i \sin \alpha x)$$

$$= \frac{1}{D^2 + \alpha^2} e^{i\alpha x}$$

$$= \frac{1}{(D - i\alpha)(D + i\alpha)} e^{i\alpha x}$$

$$= \frac{1}{D - i\alpha} \cdot \frac{1}{(i\alpha + i\alpha)} e^{i\alpha x}$$

(சூத்திரம் I ஐப் பயன்படுத்தி)

$$= \frac{1}{2i\alpha} \cdot \frac{1}{D - i\alpha} e^{i\alpha x}$$

$$= \frac{1}{2i\alpha} \cdot xe^{i\alpha x}$$ (சூத்திரம் (II)ஐப் பயன்படுத்தி)

$$= \frac{ix}{-2\alpha} (\cos \alpha x + i \sin \alpha x)$$

$$= -\frac{x}{2\alpha} (i \cos \alpha x - \sin \alpha x)$$

$$= \frac{x}{2\alpha} (\sin \alpha x - i \cos \alpha x)$$

மெய், கற்பனைப் பகுதிகளை ஒன்றுக்கொன்று சமப்படுத்தினால்,

$$u = \frac{x}{2\alpha} \sin \alpha x$$

$$v = -\frac{x \cos \alpha x}{2\alpha}$$

$$\therefore \quad \boxed{\begin{aligned} \frac{1}{D^2 + \alpha^2} \cos \alpha x &= \frac{x \sin \alpha x}{2\alpha} \\ \frac{1}{D^2 + \alpha^2} \sin \alpha x &= -\frac{x \cos \alpha x}{2\alpha} \end{aligned}}$$

சூத்திரம் (IV)

இந்த சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, $\phi(-\alpha^2) = 0$ என்ற நிலையில் $\frac{1}{\phi(D^2)} \sin \alpha x$, $\frac{1}{\phi(D^2)} \cos \alpha x$ என்பனவற்றின் முடிவுகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம். பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் இம்முறையை நன்கு விளக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{d^4 y}{dx^4} - a^4 y = \sin ax$$

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^4 - a^4) Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு,

$$D^4 - a^4 = 0$$

$$(D^2 - a^2)(D^2 + a^2) = 0$$

$$D^2 = a^2, \; D^2 = -a^2$$

$$\therefore \quad D = \pm a, \; D = \pm ia$$

$$\therefore \quad Y = Ae^{ax} + Be^{-ax} + C\cos ax + D\sin ax$$

சிறப்புத்தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^4 - a^4) u = \sin ax$$

$$u = \frac{1}{D^4 - a^4} \sin ax$$

$$= \frac{1}{D^2 + a^2} \cdot \frac{1}{D^2 - a^2} \sin ax$$

$$= \frac{1}{D^2 + ax} \cdot \frac{1}{(-a^2 - a^2)} \sin ax$$

(சூத்திரம் (III) ஐப் பயன்படுத்தி)

$$= -\frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{D^2 + a^2} \sin ax$$

(சூத்திரம் IV ஐப் பயன்படுத்தி)

$$= \frac{x \cos ax}{4a^3}$$

$\therefore$ பொதுத்தீர்வு $y = Y + u$

$$= Ae^{ax} + Be^{-ax} + C\cos ax + D\sin ax + \frac{x\cos ax}{4a^3}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

$x = 0$ என்றபோது, $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = \sin px$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு

I. $p \neq 2$ என்றால் $y = \dfrac{\sin px - \frac{p}{2}\sin 2x}{4 - p^2}$ எனவும்

II. $p = 2$ என்றால் $y = \frac{1}{8}(\sin 2x - 2x\cos 2x)$ எனவும்

நிறுவுக. (B. E. '64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு $(D^2 + 4)y = \sin px$

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க, $(D^2 + 4)Y = 0$

துணைச் சமன்பாடு $D^2 + 4 = 0$

$$D^2 = -4$$

$$D = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$$

$\therefore$ $Y = A\cos 2x + B\sin 2x$

பகுதி I $p \neq 2$ என்றபோது,

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 4)u = \sin px$$

$$\therefore\ u = \frac{1}{D^2 + 4}\sin px$$

$$= \frac{1}{-p^2 + 4}\sin px$$ (சூத்திரம் III ஐப் பயன்படுத்தி)

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{\sin px}{4 - p^2} \quad \text{... (1)}$$

$x = 0$, $y = 0$ என்ற மதிப்புகளை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = A$$

$$\therefore \quad y = B \sin 2x + \frac{\sin px}{4 - p^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{dy}{dx} = 2B \cos 2x + \frac{p \cos px}{4 - p^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$x = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ என்ற மதிப்புகளை (3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = 2B + \frac{p}{4 - p^2}$$

$$\therefore \quad B = -\frac{p}{2(4 - p^2)}$$

B-ன் இந்த மதிப்பை (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$y = -\frac{p}{2(4 - p^2)} \sin 2x + \frac{\sin px}{4 - p^2}$$

$$= \frac{\sin px - \frac{p}{2} \sin 2x}{4 - p^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

பகுதி II $p = 2$ என்றபோது. துணைத்தீர்வு Y முன் பகுதியில் கண்டுபிடித்த கோவைதான்.

சிறப்புத்தீர்வு v ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 4)\, v = \sin px = \sin 2x$$

$$\therefore \quad v = \frac{1}{D^2 + 4} \sin 2x$$

$$= -\frac{x \cos 2x}{4} \quad \text{(சூத்திரம் IV ஐப் பயன்படுத்தி)}$$

$$\therefore \quad \text{பொதுத்தீர்வு } y = Y + v = A \cos 2x + B \sin 2x - \frac{x \cos 2x}{4} \quad \ldots \quad (5)$$

$x = 0$, $y = 0$ என்ற மதிப்புகளை (5)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = A$$

$$\therefore \quad y = B \sin 2x - \frac{x \cos 2x}{4} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{dy}{dx} = 2\, B \cos 2x - \frac{1}{4} (\cos 2x - 2x \sin 2x) \quad \dots \quad (7)$$

$x = 0, \frac{dy}{dx} = 0$ என்ற மதிப்புகளை (7)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = 2B - \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad B = \frac{1}{8}$$

B-ன் இந்த மதிப்பை (6)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$y = \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{x \cos 2x}{4}$$

$$= \frac{1}{8} (\sin 2x - 2x \cos 2x).$$

பயிற்சிகள் 32

தீர்வு காண்க :

1. $\frac{d^2 y}{dx^2} + 4y = \cos 2x$
2. $(D^2 + 4) = y\, 3 \cos^2 x$
   (B. E. 56', சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)
3. $(D^2 + 16)\, y = e^{-3x} + \cos 4x$
   (B. E. '61, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்;
   B. E. '64, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)
4. $(D^2 + a^2) = y \sin ax$
5. $\frac{d^2 y}{dx^2} + b^2 y = k \cos bx;$

$x = 0$ என்றால், $y = 1$, $\frac{dy}{dx} = 0$ என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு

6. $\left[D^4 + (m^2 + n^2)\, D^2 + m^2 n^2 \right] y$

$$= \cos \frac{m+n}{2} x \cdot \cos \frac{m-n}{2} x.$$

61. §சமன்பாட்டின் வலப்புறத்தில் $e^{\alpha x} \cdot V$ என்ற உறுப்புக்குத் தகுந்த சிறப்புத் தீர்வு (இங்கு V என்பது x-ன் ஒரு சார்பு)

முதலில். $e^{\alpha x} X$ என்ற பெருக்கலின் (X, x-ன் ஒரு சார்பு) வகைக்கெழுக்களைக் காண்போம்.

$$D\left(e^{\alpha x} X\right) = e^{\alpha x} DX + X \cdot \alpha e^{\alpha x}$$

$$= e^{\alpha x}(DX + \alpha X) = e^{\alpha x}(D + \alpha) X$$

$$D^2\left(e^{\alpha x} X\right) = D\left[e^{\alpha x}(D + \alpha) X\right]$$

$$= e^{\alpha x} D(D + \alpha) X + \alpha e^{\alpha x}(D + \alpha) X$$

$$= e^{\alpha x}\left[D(D + \alpha) + \alpha D + \alpha)\right]$$

$$= e^{\alpha x}(D + \alpha)^2 X$$

இவ்வாறே, பொதுவாக

$$D^n\left(e^{\alpha x} X\right) = e^{\alpha x}(D + \alpha)^n X$$

$f(D)$ என்பது ஒரு தொடர் வகையீட்டுச் செயலியென்றால்,

$$f(D)\left(e^{\alpha x} X\right) = e^{\alpha x} f(D + \alpha) X \quad \dots \quad (1)$$

இப்போது $f(D + \alpha) X = V$ ... ... (2)
எனக் கொள்வோம்.

X ஓர் x-ன் சார்பாக இருப்பதால், V-யும் ஓர் x-ன் சார்பாக இருக்கும்.

(2)-லிருந்து, $X = \dfrac{1}{f(D + \alpha)} V$ ... ... (3)

(2), (3) இவற்றை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$f(D)\left[e^{\alpha x} \cdot \frac{1}{f(D + \alpha)} V\right] = e^{\alpha x} \cdot V \quad \dots \quad (4)$$

(4)-ன் இரு புறமும் $\frac{1}{f(D)}$ ஆல் இயங்கினால்,

$$\frac{1}{f(D)} f(D) \left[e^{\alpha x} \frac{1}{f(D+\alpha)} V \right] = \frac{1}{f(D)} \left(e^{\alpha x} V \right)$$

$$\therefore \; e^{\alpha x} \cdot \frac{1}{f(D+\alpha)} V = \frac{1}{f(D)} \left(e^{\alpha x} V \right)$$

அல்லது,

$$\boxed{\frac{1}{f(D)} \left(e^{\alpha x} V \right) = e^{\alpha x} \cdot \frac{1}{f(D+\alpha)} V}$$ சூத்திரம் (V)

இதிலிருந்து $e^{\alpha x} V$ என்ற பெருக்கலின்மீது ஒரு தொடர் செயலி இயங்கும்போது, $e^{\alpha x}$ ஐ வலத்திலிருந்து இடம் தள்ளி, தொடர் செயலி சார்பில் D-க்குப் பதிலாக $D + \alpha$ பிரதியிட்டு, புது தொடர் செயலியால் V மேல் இயங்கவேண்டுமென்று தெரிகிறது. $e^{\alpha x}$ ஐ தொடர் செயலிக்கு வெளியில் இடந்தள்ளுவதால், மேற்கண்ட முறைக்கு அடுக்குக்குறி தள்ளுதல் (exponential shift) என்று பெயர்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$(D^3 - 7D - 6)\, y = e^{2x} (1 + x)$$

(B. E. '59, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க, $(D^3 - 7D - 6)\, Y = 0$

துணைச்சமன்பாடு $D^3 - 7D - 6 = 0$

$$(D+1)(D^2 - D - 6) = 0$$

$$(D+1)(D-3)(D+2) = 0$$

$$D = -1,\; 3,\; -2$$

$$\therefore \; Y = Ae^{-x} + Be^{3x} + Ce^{-2x}$$

சிறப்புத்தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க.

$$(D^3-7D-6)\,u = e^{2x}(1+x)$$

$$u = \frac{1}{D^3-7D-6}\, e^{2x}(1+x)$$

$$= e^{2x}\cdot\frac{1}{(D+2)^3-7(D+2)-6}(1+x)$$

(அடுக்குக்குறி தள்ளுதல் மூலம்)

$$= e^{2x}\cdot\frac{1}{D^3+6D^2+12D+8-7D-14-6}(1+x)$$

$$= e^{2x}\cdot\frac{1}{D^3+6D^2+5D-12}(1+x)$$

$$= e^{2x}\cdot\frac{1}{-12\left(1-\frac{5D}{12}-\frac{6D^2}{12}-\frac{D^3}{12}\right)}(1+x)$$

$$= e^{2x}\cdot\frac{1}{-12}\left[1-\left(\frac{5D}{12}+\frac{6D^2}{12}+\frac{D^3}{12}\right)\right]^{-1}(1+x)$$

$$= -\frac{e^{2x}}{12}\left[1+\left(\frac{5D}{12}+\frac{6D^2}{12}+\frac{D^3}{12}\right)+\dots\right](1+x)$$

$$= -\frac{e^{2x}}{12}\left(1+\frac{5D}{12}\right)(1+x)$$ [தொடர் செயலியில் D-ன் முதல்படி மட்டும் போதும்]

$$= -\frac{e^{2x}}{12}\left(1+x+\frac{5}{12}\right) = -\frac{e^{2x}}{12}\left(x+\frac{17}{12}\right)$$

∴ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= Ae^{-x}+Be^{3x}+Ce^{-2x}-\frac{e^{2x}}{12}\left(x+\frac{17}{12}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = e^{2x} \sin 3x.$$

(B E. '72. மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 4)\, Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு

$$D^2 + 4 = 0$$

$$D^2 = -4 \qquad \therefore \quad D = \pm \sqrt{-4} = \pm 2i$$

$$\therefore \quad Y = A \cos 2x + B \sin 2x$$

சிறப்புத்தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 4)\, u = e^{2x} \sin 3x$$

$$u = \frac{1}{D^2+4} e^{2x} \sin 3x$$

$$= e^{2x} \cdot \frac{1}{(D+2)^2 + 4} \sin 3x$$

(அடுக்குக்குறி தள்ளுதல் மூலம்)

$$= e^{2x} \cdot \frac{1}{D^2 + 4D + 8} \sin 3x$$

$$= e^{2x} \cdot \frac{1}{-9 + 4D + 8} \sin 3x$$

(சூத்திரம் III ஐப் பயன்படுத்தி)

$$= e^{2x} \cdot \frac{1}{4D - 1} \sin 3x$$

$$= e^{2x} \cdot \frac{(4D + 1)}{16D^2 - 1} \sin 3x$$

$$= e^{2x} \cdot \frac{(4D + 1)}{16 \times -9 - 1} \sin 3x$$

$$= \frac{e^{2x}}{-145} (12 \cos 3x + \sin 3x)$$

$\therefore$ பொதுத்தீர்வு $y = Y + u$

$$= A\cos 2x + B\sin 2x - \frac{e^{2x}}{145}(12\cos 3x + \sin 3x)$$

பயிற்சிகள் 33

தீர்வு காண்க :

1. $(D^2 - 4D + 13)\, y = e^{2x}\cos 3x$
(B. E. '66, வெங்கடேசாப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $(D^2 - 2D + 3)\, y = e^{-x}\sin x$
(B. E. '64 வெங்கடேசாப் பல்கலைக்கழகம்)

3. $\frac{d^2y}{ux^2} + 2\frac{dy}{dx} - 3y = e^{2x}(1 + x^2)$
(B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

4. $y''(x) - 4y'(x) + 4y = 2e^{2x} + xe^{2x}$
(B. E. '72, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. $(D^2 - 1)\, y = e^x\cos x$
(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

6. $(D^2 - 2D + 1)\, y = e^x\sin x$
(B. E. '70, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. $(D^2 + 2D - 3)\, y = e^{2x}(1 + 2x)$
(B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

8. $(D^2 - 5D + 6)\, y = x^2 e^x$
(B. E. '72, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

9. $(D^2 + 4D - 12)\, y = (x - 1)\, e^{2x}$
(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

10. $(D^2 - 4D + 3)\, y = e^{-x}\sin x$
(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

11. $(D - 1)^2\, y = e^x + xe^{2x} - 2\sin x$
(B. E. '69, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

12. $(D^2 - 6D + 10)\, y = x^3 e^{3x} + \sin^2 x$
(B. E. '63, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

13. $(D^3 - 3D^2 + 4)\, y = xe^{2x}$

(B. E. '63, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

14. $(D^3 - D^2 - D + 1)\, y = xe^x$

(B. E. '52, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

15. $(D - 1)^3 y = xe^x + e^x$

(B. E. '63, ஓஸ்மானியாப் பல்கலைக்கழகம்)

16. $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)\, y = x^2 e^x$

(B. E. '52, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

§ 62. சமன்பாட்டின் வலப்புறத்தில் xV என்ற உறுப்புக்குத் தகுந்த சிறப்புத் தீர்வு : (இங்கு V என்பது x-ன் ஒரு சார்பு)

தொடர்ச்சியாக வகைக்கெழு காணின்,

$$D\,(x\,U) = x\,D\,U + U$$

$$D^2\,(x\,U) = x\,D^2u + D\,U + D\,U$$

$$= x\,D^2u + 2\,D\,U$$

$$D^3\,(x\,U) = x\,D^3u + D^2u + 2\,D^2\,U$$

$$= x\,D^3u + 3\,D^2\,U$$

... ...

பொதுவாக,

$$D^n\,(x\,U) = x\,D^n\,U + n \cdot D^{n-1}\,U$$

$$= x\,D^n\,U + \left(\frac{d}{dD}\,D^n\right) U$$

$\therefore$ $f(D)$ என்பது ஒரு தொடர் வகையீட்டுச் செயலி என்றால்,

$$f(D)\,(x\,U) = x\,f(D)\,U + \left[\frac{d}{dD}\,f(D)\right] U$$

$$= x\,f(D)\,U + f'(D)\,U \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இப்போது,

$$f(D)\,U = V \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

U ஒரு x-ன் சார்பாக இருப்பதால், V-யும் ஒரு x-ன் சார்பாக இருக்கும்.

(2)-லிருந்து $U = \frac{1}{f(D)} V$ ... ... (3)

(2), (3) இவற்றை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$f(D)\left[x \frac{1}{f(D)} V\right] = x V + f'(D) \cdot \frac{1}{f(D)} V \quad \cdots (4)$$

(4)-ன் இருபக்கங்களின் மீதும் $\frac{1}{f(D)}$ ஆல் இயங்கினால்,

$$\frac{1}{f(D)} f(D)\left[x \frac{1}{f(D)} V\right] = \frac{1}{f(D)} xV + \frac{1}{f(D)} \cdot f'(D) \cdot \frac{1}{f(D)} V$$

அதாவது,

$$x \cdot \frac{1}{f(D)} V = \frac{1}{f(D)} x V + \frac{1}{f(D)} \frac{f'(D)}{f(V)} V$$

அல்லது,

$$\frac{1}{f(D)} x V = x \cdot \frac{1}{f(D)} V - \frac{1}{f(D)} \cdot \frac{f'(D)}{f(D)} V$$

$$= \left[x - \frac{f'(D)}{f(D)}\right] \cdot \frac{1}{f(D)} V \quad \cdots (5)$$

$$\therefore \boxed{\frac{1}{f(D)} x V = \left[x - \frac{f'(D)}{f(D)}\right] \frac{1}{f(D)} V} \text{ சூத்திரம் (VI)}$$

இந்த சூத்திரத்தை மறுபடி மறுபடி பயன்படுத்தி,

$x^2 V$, $x^3 V$, ... முதலியவற்றிற்குத் தகுந்த சிறப்புத் தீர்வுகளைக் கண்டுபிடிக்கலாம்.

குறிப்பு : $x^2 \sin \alpha x$, $x^2 \cos \alpha x$ என்பதற்குத் தகுந்த சிறப்புத் தீர்வைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு, மேற்படி சூத்திரத்தைப் படிப்படியாக பயன்படுத்திச் செய்வது கடினமாக இருக்கும். ஆகவே, அம்மாதிரி நிலையில், $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$ முதலியவற்றிற்கு அவைகளுடைய அடுக்குக் குறி மதிப்புகளை (exponential values) பிரதியிட்டு, சூத்திரம் (V) ஐ பயன்படுத்தி சிறப்புத் தீர்வு காண்பது எளிது. இம்முறை பின்வரும் எடுத்துக்காட்டு 2-ல் விளக்கப்பட்டிருக்கிறது.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$(D^2 + 2D + 1)y = x \cos x$$

துணைத் தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 2D + 1)\,Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு,

$$D^2 + 2D + 1 = 0$$

$$(D + 1)(D + 1) = 0$$

$$D = -1,\ -1$$

$$\therefore\quad Y = e^{-x}(A + Bx)$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 2D + 1)\,u = x \cos x$$

$$\therefore\quad u = \frac{1}{D^2 + 2D + 1}\, x \cos x$$

$$= \left(x - \frac{2D + 2}{D^2 + 2D + 1}\right) \frac{1}{D^2 + 2D + 1} \cos x$$

[சூத்திரம் (VI) ஐப் பயன்படுத்தி;
இங்கு $f(D) = D^2 + 2D + 1$]

$$= \left(x - \frac{2D + 2}{D^2 + 2D + 1}\right) \frac{1}{-1 + 2D + 1} \cos x$$

(சூத்திரம் III ஐப் பயன்படுத்தி)

$$= \left(x - \frac{2D + 2}{D^2 + 2D + 1}\right) \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{D} \cos x$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{2D + 2}{D^2 + 2D + 1}\right) \sin x$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{2D + 2}{-1 + 2D + 1}\right) \sin x$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{2D + 2}{2D}\right) \sin x$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{D+1}{D} \right) \sin x$$

$$= \frac{1}{2} x \sin x - \frac{1}{2} (D + 1)(-\cos x)$$

$$= \frac{1}{2} x \sin x + \frac{1}{2} (-\sin x + \cos x)$$

$$= \frac{1}{2} (x \sin x - \sin x + \cos x)$$

∴ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= e^{-x}(A+Bx) + \frac{1}{2}(x \sin x - \sin x + \cos x)$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$(D^4 + 2D^2 + 1)\, y = x^2 \cos x$$

(B. E. '54, அண்ணுமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^4 + 2D^2 + 1)\, Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு,

$$D^4 + 2D^2 + 1 = 0$$

$$(D^2 + 1)(D^2 + 1) = 0$$

$$D^2 = -1, -1$$

$$D = \pm i, \pm i$$

$$\therefore \quad Y = (A+Bx)\cos x + (C+Dx)\sin x$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^4 + 2D^2 + 1)\, u = x^2 \cos x$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 1} x^2 \cos x$$

$$= \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 1} x^2 \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 1} \frac{x^2 e^{ix}}{2} + \frac{1}{D^4 + 2D^2 + 1} \frac{x^2 e^{-ix}}{2} \quad \ldots \quad (1)$$

இப்போது

$$\frac{1}{D^4 + 2D^2 + 1} \frac{x^2 e^{ix}}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(D^2+1)^2} x^2 e^{ix}$$

$$= \frac{1}{2} e^{ix} \cdot \frac{1}{[(D+i)^2 + 1]^2} x^2$$

[அடுக்குக்குறி தள்ளுதல் மூலம்]

$$= \frac{1}{2} e^{ix} \cdot \frac{1}{(D^2 + 2iD)^2} x^2$$

$$= \frac{1}{2} e^{ix} \cdot \frac{1}{\left[2iD\left(1 + \frac{D}{2i}\right)\right]^2} x^2$$

$$= \frac{1}{2} e^{ix} \cdot \frac{1}{4i^2 D^2}\left(1 + \frac{D}{2i}\right)^{-2} x^2$$

$$= -\frac{e^{ix}}{8 D^2}\left(1 - \frac{2D}{2i} + \frac{3D^2}{4i^2}\right) x^2$$

$$= -\frac{e^{ix}}{8} \cdot \frac{1}{D^2}\left(1 - \frac{D}{i} - \frac{3}{4} D^2\right) x^2$$

$$= -\frac{e^{ix}}{8} \cdot \frac{1}{D^2}\left(x^2 - \frac{2x}{i} - \frac{3}{2}\right)$$

$$= -\frac{e^{ix}}{8}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{2}{i} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4}\right)$$

$$= -\frac{e^{ix}}{8}\left(-\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3i} + \frac{3x^2}{4}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2)-ல் i-க்குப் பதிலாக $-i$ பிரதியிட்டால்,

$$\frac{1}{D^4+2D^2+1} \cdot \frac{x^2 e^{-ix}}{2} = \frac{e^{-ix}}{8}\left(-\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3i} + \frac{3x^2}{4}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2), (3) இவற்றை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$u = \frac{e^{ix}}{8}\left(-\frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{3i} + \frac{3x^2}{4}\right) + \frac{e^{-ix}}{8}\left(-\frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3i} + \frac{3x^2}{4}\right)$$

$$= -\frac{x^4}{96}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) + \frac{x^3}{24i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) + \frac{3x^2}{32}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right)$$

$$= -\frac{x^4}{96} \cdot 2\cos x + \frac{x^3}{24i} \cdot 2i\sin x + \frac{3x^2}{32} \cdot 2\cos x$$

$$= -\frac{x^4}{48}\cos x + \frac{x^3}{12}\sin x + \frac{3x^2}{16}\cos x$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= (A + Bx)\cos x + (C + Dx)\sin x - \frac{x^4}{48}\cos x + \frac{x^3}{12}\sin x + \frac{3x^2}{16}\cos x$$

பயிற்சிகள் 34

தீர்வு காண்க :

1. $(D^2 + 4)\,y = x\sin x$
   (B. E. '53; 70, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} = x^2 \sin x$ (B. E. '57, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - y = x^2\cos x$

4. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + y = x\sin x$

5. $(D^2 + 1)\,y = x\cos 2x$

6. $(D^4 + 8D^2 + 16)\,y = x\sin 2x$

6. மாறி குணகங்களுடன் கூடிய நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(Linear differential equations with variable coefficients)

§63. ஒரு படித்தான நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

இந்த அத்தியாயத்தில் மாறி குணகங்களுடன் கூடிய நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப்பற்றி ஆராய்வோம். முக்கியமாக ஒரு குறிப்பிட்ட அமைப்புள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளைப்பற்றி கவனிப்போம்.

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots \dots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = X \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்பது சம ஒருபடி வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும் (homogeneous differential equation). இதில் $a_1, a_2, \dots a_n$ மாறிலிகள்,

X ஒரு x-ன் சார்பு. இந்த அமைப்பில்

$x \dfrac{dy}{dx}$ ($x \times$ முதல் வகைக்கெழு),

$x^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2}$ ($x^2 \times$ இரண்டாம் வகைக்கெழு), ...

$x^r \dfrac{d^r y}{dx^r}$ ($x^r \times$ r-ம் வகைக்கெழு), ... என்ற சேர்க்கைகள் உறுப்புக்களில் இருக்கின்றன. அதனால் இந்தச் சமன்பாட்டுக்கு சமபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (homogeneous linear differential equation) எனப்பெயர்.

$x = e^z$ என்று பிரதியிட்டு, சார்பில் மாறிலியை x-லிருந்து z-க்கு மாற்றினால், (1)வது சமன்பாட்டை, மாறிலி குணகங்களுடன்

கூடிய வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டாக மாற்றலாம். இந்த மாற்று முறையை விவரமாக ஆராய்வோம்.

$$x = e^z \text{ என்றால்,} \quad z = \log x \,; \ \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \ \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x}$$

$$\therefore \ x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz} \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{dy}{dz} \cdot -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dz}\right)$$

$$= -\frac{1}{x^2} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dz}\left(\frac{dy}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dx}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dz} + \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2y}{dz^2} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)$$

$$\therefore \ x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{x^2} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)$$

$$+ \left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2} \frac{d}{dz}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) \cdot \frac{dz}{dx} + \left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right) \cdot \left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^3y}{dz^3} - \frac{d^2y}{dz^2}\right) \cdot \frac{1}{x} - \frac{2}{x^3}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dz^3} - \frac{d^2y}{dz^2} - 2\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz}\right)$$

$$= \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz}\right)$$

$$\therefore \quad x^3 \frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இப்போது D என்ற செயலி முன்போல் $\frac{d}{dx}$ ஐயும் θ என்ற செயலி $\frac{d}{dz}$ ஐயும் குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

மேற்கண்ட (1), (2), (3) முடிவுகளைப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

$$xDy = \theta y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$x^2D^2y = \theta^2 y - \theta y$$
$$= (\theta^2 - \theta)y$$
$$= \theta(\theta - 1)y \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$$x^3D^3y = \theta^3 y - 3\theta^2 y + 2\theta y$$
$$= (\theta^3 - 3\theta^2 + 2\theta)y$$
$$= \theta(\theta^2 - 3\theta + 2)y$$
$$= \theta(\theta - 1)(\theta - 2)y \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

(4), (5), (6) இவற்றிலிருந்து D, θ என்ற இரு செயலிகளுக்குமுள்ள சம்பந்தம் பின்வருமாறு :

$$\left.\begin{aligned} &xD = \theta, \quad x^2D^2 = \theta(\theta-1), \\ &x^3D^3 = \theta(\theta-1)(\theta-2) \\ &\text{பொதுவாக} \\ &x^rD^r = \theta(\theta-1)(\theta-2)\ldots\ldots(\theta-r+1) \end{aligned}\right\}$$

ஆகவே $x = e^z$ என்று பிரதியிட்டு, $\frac{d}{dz}$ என்பதை θ என்று குறிப்பிட்டால், சமன்பாடு I பின்வரும் உருக்கொள்கிறது :

$$\Big[\theta(\theta-1)\ldots(\theta-n+1) + a_1\theta(\theta-1)\ldots(\theta-n+2) + \ldots$$
$$+ a_{n-1}\theta + a_n\Big]y = Z \quad \ldots \quad \ldots \quad \text{II}$$

இங்கு Z என்பது X-ன் மாறிய அமைப்பு.

அது z-ன் சார்பாக இருக்கும்.

சமன்பாடு II, $f(\theta)\,y = Z$ III

என்ற அமைப்பிலுள்ளது. அதில் குணகங்களெல்லாம் மாறிலிகள். ஆகவே முன் அத்தியாயத்தில் கூறிய முறைகள் கொண்டு, அதன் தீர்வு காணலாம். அதன் பொதுத்தீர்வு $y = \phi(z)$ என்றால், I-ன் பொதுத்தீர்வு $y = \phi(\log x)$ என்பதாகும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 7x\frac{dy}{dx} - 5y = x^5$$

(B. E. '57, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

$\frac{d}{dx} = D$ என்றால் கொடுத்துள்ள சமன்பாடு

$$(x^2D^2 + 7xD + 5)\,y = x^5 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$x = e^z$ அதாவது $z = \log x$ என்று பிரதியிட்டு,

$\frac{d}{dz}$ ஐ என்று குறிப்பிட்டால்,

$xD = \theta$, $x^2D^2 = \theta(\theta-1)$ என்ற முடிவுகள் நமக்குத் தெரியும்.

∴ சமன்பாடு (1)

$$[\theta(\theta-1)+7\theta+5]\,y=(e^z)^5=e^{5z}$$

$$(\theta^2+6\theta+5)\,y=e^{5z} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்றாகும்.

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க, $(\theta^2+6\theta+5)\,Y=0$

துணைச் சமன்பாடு $\theta^2+6\theta+5=0$

$$(\theta+1)(\theta+5)=0$$

$$\theta=-1,\,-5$$

$$\therefore\quad Y=Ae^{-z}+Be^{-5z}$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(\theta^2+6\theta+5)\,u=e^{5z}$$

$$\therefore\quad u=\frac{1}{\theta^2+6\theta+5}\,e^{5z}$$

$$=\frac{1}{5^2+6\times5+5}\,e^{5z}$$

$$=\frac{1}{60}\,e^{5z}$$

∴ பொதுத் தீர்வு $y=Y+u$

$$=Ae^{-z}+Be^{-5z}+\frac{1}{60}\,e^{5z}$$

$$=A(e^z)^{-1}+B(e^z)^{-5}+\frac{1}{60}\,(e^z)^5$$

$$=Ax^{-1}+Bx^{-5}+\frac{1}{60}\,x^5$$

$$=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^5}+\frac{1}{60}\,x^5$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3}+3x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+y=\cos(\log x)$$

(B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு

$$(x^3D^3 + 3x^2D^2 + xD + 1)\,y = \cos(\log x) \quad \cdots \quad (1)$$

$x = e^z$ (அதாவது $z = \log x$) என்று பிரதியிட்டு,

$\frac{d}{dz}$ ஐ θ என்று குறிப்பிட்டால்,

$$xD = \theta, \quad x^2D^2 = \theta(\theta - 1),$$

$x^3D^3 = \theta(\theta - 1)(\theta - 2)$ என்ற முடிவுகள் நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore$ சமன்பாடு (1),

$$[\theta(\theta - 1)(\theta - 2) + 3\theta(\theta - 1) + \theta + 1]\,y = \cos z$$

$$[\theta(\theta^2 - 3\theta + 2) + 3\theta^2 - 3\theta + \theta + 1]\,y = \cos z$$

அதாவது $(\theta^3 + 1)\,y = \cos z \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

என்றாகும்.

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க, $(\theta^3 + 1)\,Y = 0$

துணைச் சமன்பாடு $\theta^3 + 1 = 0$

$$(\theta + 1)(\theta^2 - \theta + 1) = 0$$

$$\theta = -1, \quad \theta = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$$

$$\theta = -1, \quad \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \quad Y = Ae^{-z} + e^{\frac{1}{2}z}\left(B\cos\frac{\sqrt{3}}{2}z + C\sin\frac{\sqrt{3}}{2}z\right)$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(\theta^3 + 1)\,u = \cos z$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{\theta^3 + 1}\cos z$$

$$= \frac{1}{\theta \cdot \theta^2 + 1}\cos z$$

$$= \frac{1}{1 - \theta}\cos z \qquad (\theta^2 = -1 \text{ என்று பிரதியிட்டு})$$

$$= \frac{1+\theta}{(1-\theta)(1+\theta)} \cos z$$

$$= \frac{1+\theta}{1-\theta^2} \cos z$$

$$= \frac{1+\theta}{1+1} \cos z$$

$$= \frac{1}{2} (\cos z - \sin z)$$

∴ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= A e^{-z} + e^{\frac{1}{2}z}\left(B \cos \frac{\sqrt{3}}{2} z + C \sin \frac{\sqrt{3}}{2} z\right) + \frac{1}{2} (\cos z - \sin z)$$

$$= Ax^{-1} + x^{\frac{1}{2}} \left[B \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log x\right) + C \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log x\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\cos(\log x) - \sin(\log x)\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 3 :

தீர்வு காண்க :

$$(x^2 D^2 - xD + 2) y = x \log x$$

$x = e^z$ (அதாவது $z = \log x$) என்று பிரதியிட்டு,

$\frac{d}{dz}$ ஐ θ என்று குறிப்பிட்டால்,

$xD = \theta,\ x^2 D^2 = \theta(\theta - 1)$ என்ற முடிவுகள் நமக்குத் தெரியும்.

∴ கொடுத்துள்ள சமன்பாடு,

$$[\theta(\theta-1) - \theta + 2] y = e^z . z$$

$$(\theta^2 - 2\theta + 2) y = e^z . z \text{ என்றாகும்.}$$

துணைத் தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(\theta^2 - 2\theta + 2) Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு

$$\theta^2 - 2\theta + 2 = 0$$

$$\theta = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i$$

$$\therefore \quad Y = e^z (A \cos z + B \sin z)$$

சிறப்புத்தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(\theta^2 - 2\theta + 2)\, u = e^z \,.\, z$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{\theta^2 - 2\theta + 2}\, e^z \,.\, z$$

$$= e^z \cdot \frac{1}{(\theta+1)^2 - 2(\theta+1) + 2} \cdot z$$

(அடுக்குக்குறி தள்ளுதல் மூலம்)

$$= e^z \cdot \frac{1}{\theta^2 + 2\theta + 1 - 2\theta - 2 + 2} \cdot z$$

$$= e^z \cdot \frac{1}{\theta^2 + 1}\, z$$

$$= e^z \cdot (1 + \theta^2)^{-1} z$$

$$= e^z \cdot (1 - \theta^2 + \ldots) z$$

$$= e^z \,.\, z$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு,

$$y = Y + u$$

$$= e^z (A \cos z + B \sin z) + e^z \cdot z$$

$$= x\,[\,A \cos (\log x) + B \sin (\log x)\,] + x \log x$$

எடுத்துக்காட்டு 4 :

தீர்வு காண்க :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x \frac{dy}{dx} + 2y = e^x$$

(B. E. '61, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்;
B. E. '63, ஓஸ்மானியாப் பல்கலைக்கழகம்)

$x = e^z$ (அதாவது $z = \log x$) என்று பிரதியிட்டு, $\dfrac{d}{dz}$ ஐ θ என்று குறிப்பிட்டால், கொடுத்துள்ள சமன்பாடு,

$$[\,\theta(\theta - 1) + 4\theta + 2\,]\, y = e^{e^z}$$

$$(\theta^2 + 3\theta + 2)\, y = e^{e^z}$$ என்றாகும்.

துணைத் தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(\theta^2 + 3\theta + 2)\, Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு,

$$\theta^2 + 3\theta + 2 = 0$$

$$(\theta + 1)(\theta + 2) = 0$$

$$\theta = -1,\ \theta = -2$$

$$\therefore\quad Y = Ae^{-z} + Be^{-2z}$$

சிறப்புத்தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(\theta^2 + 3\theta + 2)\, u = e^{e^z}$$

$$\therefore\quad u = \frac{1}{\theta^2 + 3\theta + 2}\, e^{e^z}$$

$$= \frac{1}{(\theta + 1)(\theta + 2)}\, e^{e^z}$$

$$= \left(\frac{1}{\theta + 1} - \frac{1}{\theta + 2}\right) e^{e^z}$$

(செயலியைப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து)

$$= \frac{1}{\theta + 1}\, e^{e^z} - \frac{1}{\theta + 2}\, e^{e^z}$$

$$= \frac{1}{\theta + 1}\, e^{-z} e^{z} e^{e^z} - \frac{1}{\theta + 2}\, e^{-2z} e^{2z} e^{e^z}$$

$$= e^{-z} \cdot \frac{1}{\theta - 1 + 1}\, e^{z} e^{e^z} - e^{-2z}\, \frac{1}{\theta - 2 + 2}\, e^{2z} e^{e^z}$$

(அடுக்குக் குறித் தள்ளுதல் மூலம்)

$$= e^{-z} \cdot \frac{1}{\theta}\, e^{z} e^{e^z} - e^{-2z} \cdot \frac{1}{\theta}\, e^{2z} e^{e^z}$$

$$= e^{-z} \int e^{z} e^{e^z}\, dz - e^{-2z} \int e^{2z} e^{e^z}\, dz$$

$$= e^{-z} \int e^{e^z}\, d(e^z) - e^{-2z} \int e^{z} e^{e^z}\, d(e^z)$$

$$= e^{-z} \int e^{x}\, dx - e^{-2z} \int x\, e^{x}\, dx \qquad (\because\ e^z = x)$$

$$= e^{-z}\ e^{x} - e^{-2z} \int x\, d(e^{x})$$

$$= e^{-z} . e^{x} - e^{-2z} \left[xe^{x} - \int e^{x}\, dx \right]$$
$$= e^{-z} e^{x} - e^{-2z} (xe^{x} - e^{x})$$
$$= e^{-z} e^{x} - e^{-2z} e^{x} (x-1)$$

∴ பொதுத்தீர்வு $y = Y + u$

$$= Ae^{-z} + Be^{-2z} + e^{-z} e^{x} - e^{-2z} e^{x} (x-1)$$
$$= Ax^{-1} + Bx^{-2} + x^{-1} e^{x} - x^{-2} e^{x} (x-1)$$
$$= \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{e^x}{x^2}$$

பயிற்சிகள் 35

தீர்வு காண்க : (1-லிருந்து 22 வரை)

1. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dv}{dx} - 4y = x^4$

(B. E. '66, ஆந்திராப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} = 3x^2$

(B. E. '53, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

3. $(x^2 D^2 - 4xD + 6) y = x^2 (x+1)$

(B. E. '64, ஓஸ்மானியாப் பல்கலைக்கழகம்)

4. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = x^2$

(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. $x^2 y''(x) - 3x y'(x) = x + 11$

(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

6. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2y = x^3$

(B. E. '70, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. $x^2y''(x) + 4xy'(x) + 2y = 6x$

(B. E. '70, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

8. $x^2y''(x) + xy'(x) - 9y = \frac{5}{x^2}$

(B. E. '72, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

9. $(x^2 D^2 - 2)y = x^2 + \frac{1}{x}$

(B. E. '70, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

10 $x^2 y''(x) - 2nx\,y'(x) + n(n+1)y = x^n$

(B. E '65, வெங்கடேசா பல்கலைக்கழகம்)

11. $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 3x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 8y = 3x^2$

(B. E. '54, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

12. $x^3 y'''(x) + 2x^2 y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0$

(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

13. $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 9x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 18x\frac{dy}{dx} + 6y = \frac{1}{x}$

(B. E. '60, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

14. $(x^3 D^3 + 3x^2 D^2 + xD + 1)y = \sin(\log x)$

(B. E. '65, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

15. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4x\frac{dy}{dx} + 2y = x\log x$

(B. E. '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

16. $(x^2 D^2 - 5xD - 7)y = x^3 \log x$

(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

17. $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = 2x\log x$;

$x = 1$ என்றால் $y = 1$, $\frac{dy}{dx} = 0$

என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு

(B. E. '60, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

18. $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{12\log x}{x^2}$

(B. E. '66, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

19. $x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 1 = 0$

(B. E '59, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

20. $x^4 x'''(x) - x^3 y'(x) + x^2 y(x) = 1$

(B. E 72', சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

21. $xy''(x) - 3y'(x) = x^2$
(B. E. '70, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

22. $(x^2 D^2 + 3xD + 1)y = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

[குறிப்பு: சிறப்புத் தீர்வு கண்டுபிடிக்க, எடுத்துக்காட்டு 4-ல் கையாண்ட முறையைப் பின்பற்றவும்.]

23. $r^2 \dfrac{d^2R}{dr^2} + r\dfrac{dR}{dr} + \lambda R = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் λ ஒரு $+$, $-$ மாறிலி அல்லது 0 என்பதற்குத் தகுந்தாற்போல், மூன்று வெவ்வேறு தீர்வுகளைக் காணவும்.
(B. E. '73, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

§ 64. ஒருபடித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கு மாற்றக் கூடிய சமன்பாடுகள் :

$$(a+bx)^n \frac{d^ny}{dx^n} + P_1(a+bx)^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots$$
$$\dots + P_{n-1}(a+bx)\frac{dy}{dx} + P_n y = F(x) \quad \dots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டில் $P_1, P_2, \dots P_n$ மாறிலிகள்.

$F(x)$, x-ன் சார்பு எனக் கொள்வோம்.

இப்போது $a + bx = X$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$\frac{dX}{dx} = b$$

$$\therefore \frac{d}{dx} = \frac{d}{dX} \cdot \left(\frac{dX}{dx}\right) = b\frac{d}{dX}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = b^2\frac{d^2}{dX^2}, \quad \frac{d^3}{dx^3} = b^3\frac{d^3}{dX^3}, \dots$$

இவைகளை (1)-ல் பிரயிட்டால்,

$$X^n b^n \frac{d^ny}{dX^n} + P_1 X^{n-1} b^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dX^{n-1}} + \dots$$
$$\dots + P_{n-1} X b \frac{dy}{dX} + P_n y = F\left(\frac{X-a}{b}\right)$$

$$X^n \frac{d^n y}{dx^n} + \frac{P_1}{b} X^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dX^{n-1}} + \cdots \cdots + \frac{P_n}{b^n} y = \frac{1}{b^n} F\left(\frac{X-a}{b}\right)$$
$$= \phi(X) \quad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடு (2), ஒரு படித்தான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும். ஆகவே அதன் தீர்வை § 63-ல் விவரித்த முறைப்படி கண்டு பிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

தீர்வு காண்க :

$$(x+a)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 4(x+a)\frac{dy}{dx} + 6y = x$$

(B. E. '50, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

$$x + a = X \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்று பிரதியிட்டால், $\frac{dX}{dx} = 1$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dX} \cdot \frac{dX}{dx} = \frac{dy}{dX}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dX}\right) = \frac{d}{dX}\left(\frac{dy}{dX}\right) \cdot \frac{dX}{dx}$$

$$= \frac{d^2 y}{dX^2}$$

ஆகவே, கொடுத்துள்ள சமன்பாடு

$$X^2 \frac{d^2 y}{dX^2} - 4X\frac{dy}{dX} + 6y = X - a \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்றாகும்.

இப்போது $X = e^z$ (அதாவது $z = \log X$) என்று பிரதியிட்டு,

$\frac{d}{dz}$ ஐ θ என்று குறிப்பிட்டால், சமன்பாடு (2)

$$[\theta(\theta - 1) - 4\theta + 6]\, y = e^z - a$$

$$(\theta^2 - 5\theta + 6)\, y = e^z - a \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

என்றாகும்.

துணைத் தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க, $(\theta^2 - 5\theta + 6)Y = 0$

துணைச் சமன்பாடு $\theta^2 - 5\theta + 6 = 0$

$$(\theta - 2)(\theta - 3) = 0$$

$$\theta = 2, 3$$

$$\therefore \quad Y = Ae^{2z} + Be^{3z}$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(\theta^2 - 5\theta + 6)u = e^z - a$$

$$u = \frac{1}{\theta^2 - 5\theta + 6}(e^z - a)$$

$$= \frac{1}{\theta^2 - 5\theta + 6}e^z - a \cdot \frac{1}{\theta^2 - 5\theta + 6} \cdot (1)$$

$$= \frac{1}{1 - 5 + 6}e^z - a \cdot \frac{1}{\theta^2 - 5\theta + 6} \cdot e^{0 \cdot z}$$

$$= \frac{e^z}{2} - a \cdot \frac{1}{0 - 0 + 6}e^{0 \cdot z}$$

$$= \frac{e^z}{2} - \frac{a}{6}$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு $y = Y + u$

$$= Ae^{2z} + Be^{3z} + \frac{e^z}{2} - \frac{a}{6}$$

$$= AX^2 + BX^3 + \frac{X}{2} - \frac{a}{6}$$

$$= A(x+a)^2 + B(x+a)^3 + \frac{x+a}{2} - \frac{a}{6}$$

$$= A(x+a)^2 + B(x+a)^3 + \frac{1}{6}(3x + 2a)$$

பயிற்சிகள் 36

தீர்வு காண்க :

1. $(2x-1)^3 \dfrac{d^3y}{dx^3} + (2x-1)\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$

(B. E. '53, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $(5 + 2x)^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} - 6(5 + 2x)\dfrac{dy}{dx} + 8y = 6x$

(B. E. '51, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

3. $(x + 2)^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} - (x + 2)\dfrac{dy}{dx} + y = 3x + 4$

(B. E. '65, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

4. $(1 + x)^2 \dfrac{d^2 y}{dx^4} + (1 + x)\dfrac{dy}{dx} + y$

$= 4 \cos \log (1 + x)$

5. $(a + bx)^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} + b(a + bx)\dfrac{dy}{dx} + k^2 y = 0$

(B. E. '52 சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. ஒருங்கமை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(Simultaneous Linear Differential equations)

§65. இதுவரை, இரு மாறிகளடங்கிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை ஆராய்ந்தோம். x, y இரண்டு சார்புடைய மாறிகள் t என்ற சார்பில் மாறியைப் பொறுத்த சார்புகளாக இருக்கட்டும். x, y, t இவைகளடங்கிய இரண்டு வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளிலிருந்து, x, y இரண்டையும் t சார்பில் தீர்வு காண இயலும். இது போன்ற நிலையில், சமன்பாட்டுத் தொகுதிகள் அமைகின்றன. இந்த அத்தியாயத்தில் மாறா குணகங்களுடன் கூடிய ஒருங்கமை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை ஆராய்வோம்.

§66. ஒருங்கமை நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

$$f_1(D)\,x + f_2(D)\,y = \phi_1(t) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$F_1(D)\,x + F_2(D)\,y = \phi_2(t) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

என்ற சமன்பாடுகளில் D என்பது $\frac{d}{dt}$ என்ற செயலி; f_1, f_2, F_1, F_2 என்பவை D-ல் பல்லுறுப்புக் கோவைகள். இந்த சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண, இயற்கணித ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு முறையைப் பின்பற்றுகிறோம். அதாவது, முதலில் (1), (2) இவைகளிலிருந்து x மட்டும் அடங்கிய ஒரு சமன்பாட்டைக் கண்டு பிடிக்கிறோம். இதற்கு y ஐ நீக்க வேண்டும்.

(1)-ன் இரு பக்கமும் $F_2(D)$ ஆல் இயக்கினால்,

$$F_2(D)\cdot f_1(D)\,x + F_2(D)\cdot f_2(D)\,y = F_2(D)\cdot \phi_1(t) \quad \ldots \quad (3)$$

(2)-ன் இரு பக்கமும் $f_2(D)$ ஆல் இயக்கினால்,

$$f_2(D)\cdot f_1(D)\,x + f_2(D)\cdot F_2(D)\,y = f_2(D)\cdot\phi_2(t) \quad \ldots \quad (4)$$

(3) – (4); $$[F_2(D)\cdot f_1(D) - f_2(D)\cdot F_1(D)]\,x = F_2(D)\cdot\phi_1(t) - f_2(D)\cdot\phi_2(t) \quad \ldots \quad (5)$$

(5) மாறி குணகங்களுடன் கூடிய ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

(5)-ன் தீர்வு $x = \phi(t)$ ... ... (6)

என்றால், (6) ஐ (1) அல்லது (2)-ல் பிரதியிட்டு y கண்டுபிடிக்க இயலும்.

குறிப்பு 1 : $[F_2(D)\cdot f_1(D) - f_2(D)\cdot F_1(D)]$ என்ற கோவையில் D-ன் உயர்ந்த படியின் எண்ணிக்கையே, x, y இவைகளுடைய பொதுத் தீர்வில் அடங்கிய மாறிலிகளின் எண்ணிக்கைக்குச் சமம். ஒருங்கை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுடைய தீர்வு காணும்போது, மேற்சொன்ன விதிப் பிரகாரம் பொதுத் தீர்வில் மாறலிகள் அமைந்திருக்க வேண்டும். இந்த அளவுக்கு மேல் மாறிலிகள் கொண்டுவரப்பட்டால், அதிகப் படியான மாறிலிகளை மற்றவைகள் சார்பில் அமைக்க வேண்டும்.

குறிப்பு 2 : (1), (2) இவற்றிலிருந்து, x ஐ நீக்கி, y மட்டும் அடங்கிய சமன்பாட்டைக் காணலாம். அதிலிருந்து, y-ன் தீர்வு காணும்போது, அத் தீர்வில் அமைந்திருக்கும் மாறிலிகள் தனித்தவையல்ல. இவைகளுக்கும் x-ன் பொதுத் தீர்விலிருக்கும் மாறிலிகளுக்கும் உள்ள தொடர்பை, x, y இவற்றின் மதிப்புகளை (1) அல்லது (2)-ல் பிரதியிட்டுக் கண்டுபிடிக்க வேண்டும்.

ஒருங்கைச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காணும் முறைக் கீழ்வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் நன்கு விளங்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{dx}{dt} + 4x + 3y = t$$

$$\frac{dy}{dt} + 2x + 5y = e^t$$

(B. E. '61, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்;
B. E. '64, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

முதல் வழி :

கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள்,

$$(D + 4)\, x + 3y = t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$2x + (D + 5)\, y = e^t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-ன் இரு பக்கமும் $(D + 5)$ ஆல் இயக்கினால்,

$$(D + 5)(D + 4)\, x + 3\,(D + 5)\, y = (D + 5)\, t$$

$$= 1 + 5t \quad \ldots \quad (3)$$

(2) ஐ 3 ஆல் பெருக்கினால்,

$$6x + 3\,(D + 5)\, y = 3e^t \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(3) − (4) ;

$$[\,(D + 5)(D + 4) - 6\,]\, x = 1 + 5t - 3e^t$$

$$(D^2 + 9D + 14)\, x = 1 + 5t - 3e^t \quad \ldots \quad (5)$$

துணைத் தீர்வு X ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 9D + 14)\, X = 0$$

துணைச் சமன்பாடு,

$$D^2 + 9D + 14 = 0$$

$$(D + 2)(D + 7) = 0$$

$$D = -2, \ -7$$

$$\therefore \quad X = Ae^{-2t} + Be^{-7t}$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + 9D + 14)\, u = 1 + 5t - 3e^t$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{D^2 + 9D + 14}\,(1 + 5t - 3e^t)$$

$$u_1 = \frac{1}{D^2 + 9D + 14}\,(1 + 5t)$$

$$= \frac{1}{14\left(1 + \dfrac{9D}{14} + \dfrac{D^2}{14}\right)}\,(1 + 5t)$$

$$= \frac{1}{14}\left(1 + \frac{9D}{14} + \frac{D^2}{14}\right)^{-1}(1 + 5t)$$

$$= \frac{1}{14}\left(1 - \frac{9D}{14}\right)(1 + 5t)$$

$$= \frac{1}{14}\left(1 + 5t - \frac{9}{14} \times 5\right)$$

$$= \frac{1}{14}\left(5t - \frac{31}{14}\right) = \frac{5t}{14} - \frac{31}{196}$$

$$u_2 = \frac{1}{D^2 + 9D + 14}(-3e^t)$$

$$= \frac{1}{1 + 9 + 14}(-3e^t) = -\frac{e^t}{8}$$

$$u = u_1 + u_2$$

∴ பொதுத் தீர்வு,

$$x = X + u$$

$$= Ae^{-2t} + Be^{-7t} + \frac{5t}{14} - \frac{31}{196} - \frac{e^t}{8} \quad \ldots \quad (6)$$

(6)-ன் வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{dx}{dt} = -2Ae^{-2t} - 7Be^{-7t} + \frac{5}{14} - \frac{e^t}{8} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

(1)-லிருந்து,

$$3y = t - (D + 4)x$$

$$= t - \frac{dx}{dt} - 4x$$

$$= t + 2Ae^{-2t} + 7Be^{-7t} - \frac{5}{14} + \frac{e^t}{8}$$

$$- 4Ae^{-2t} - 4Be^{-7t} - \frac{10t}{7} + \frac{31}{49} + \frac{e^t}{2}$$

[(6), (7) இவைகளைப் பயன்படுத்தி]

$$= -2Ae^{-2t} + 3Be^{-7t} - \frac{3t}{7} + \frac{5e^t}{8} + \frac{27}{98}$$

$$\therefore \; y = -\frac{2A}{3}e^{-2t} + Be^{-7t} - \frac{t}{7} + \frac{5e^t}{24} + \frac{9}{98}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad (8)$$

இரண்டாம் வழி :

முதல்வழிப் பிரகாரம்,

$$x = Ae^{-2t} + Be^{-7t} + \frac{5t}{14} - \frac{31}{196} - \frac{e^t}{8} \quad \ldots \quad (6)$$

இதை (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$\frac{dy}{dt} + 5y = -2x + e^t$$

$$= -2Ae^{-2t} - 2Be^{-7t} - \frac{5t}{7} + \frac{31}{98} + \frac{e^t}{4} + e^t$$

$$= -2Ae^{-2t} - 2Be^{-7t} - \frac{5t}{7} + \frac{31}{98} + \frac{5e^t}{4} \quad \ldots \quad \ldots \quad (9)$$

இது y-ல் ஒரு நேரிய சமன்பாடு.

$$\text{தொகையீட்டுக் காரணி} = e^{\int 5dt} = e^{5t}$$

(9) ஐ e^{5t} ஆல் பெருக்கினால்,

$$\frac{d}{dt}(ye^{5t}) = \left(-2Ae^{-2t} - 2Be^{-7t} - \frac{5t}{7} + \frac{31}{98} + \frac{5e^t}{4}\right)e^{5t}$$

$$= -2Ae^{3t} - 2Be^{-2t} - \frac{5t}{7}e^{5t} + \frac{31}{98}e^{5t} + \frac{5e^{6t}}{4}$$

தொகையிட்டால்,

$$ye^{5t} = C - 2A \cdot \frac{e^{3t}}{3} - \frac{2B \cdot e^{-2t}}{-2} - \frac{5}{7}\int te^{5t}\,dt + \frac{31}{98} \cdot \frac{e^{5t}}{5} + \frac{5}{4} \cdot \frac{e^{6t}}{6}$$

$$= C - \frac{2A}{3}e^{3t} + Be^{-2t} - \frac{5}{7}\left(t\frac{e^{5t}}{5} - \frac{e^{5t}}{25}\right) + \frac{31e^{5t}}{490} + \frac{5e^{6t}}{24}$$

$$= C - \frac{2A}{3}e^{3t} + Be^{-2t} - \frac{t}{7}e^{5t} + \frac{e^{5t}}{35} + \frac{31e^{5t}}{490} + \frac{5e^{6t}}{24}$$

$$= C - \frac{2A}{3} e^{3t} + Be^{-2t} - \frac{t}{7} e^{5t} + \frac{9}{98} e^{5t} + \frac{5e^{6t}}{24}$$

$$\therefore \quad y = Ce^{-5t} - \frac{2A}{3} e^{-2t} + Be^{-7t} - \frac{t}{7} + \frac{9}{98} + \frac{5}{24} e^{t} \quad \ldots \quad (10)$$

இந்தத் தீர்வில் அதிகப்படியாக C என்ற ஒரு மாறிலி இடம் பெற்றிருக்கிறது. C, A, B இவைகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் கண்டுபிடிக்க, x, y இவற்றின் மதிப்புகளை (6), (10) இவற்றிலிருந்து (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$- 2Ae^{-2t} - 7Be^{-7t} + \frac{5}{14} - \frac{e^{t}}{8}$$
$$+ 4\left(Ae^{-2t} + Be^{-7t} + \frac{5t}{14} - \frac{31}{196} - \frac{e^{t}}{8}\right)$$
$$+ 3\left(Ce^{-5t} - \frac{2A}{3} e^{-2t} + Be^{-7t} - \frac{t}{7} + \frac{9}{98} + \frac{5}{24} e^{t}\right) = t$$

இதைச் சுருக்கினால்,

$$3Ce^{-5t} = 0$$
$$\therefore \quad C = 0$$

C-ன் இந்த மதிப்பை (10)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$y = -\frac{2A}{3} e^{-2t} + Be^{-7t} - \frac{t}{7} + \frac{9}{98} + \frac{5}{24} e^{t}$$

இது முன்பு கிடைத்த தீர்வுதான்.

மூன்றாம் வழி.

முதல் இரு வழிகள் பிரகாரம், y ஐ நீக்கி, x-ல் ஒரு சமன்பாடு கிடைத்தது.

$$x = Ae^{-2t} + Be^{-7t} + \frac{5t}{14} - \frac{31}{196} - \frac{e^{t}}{8} \quad \ldots \quad (6)$$

இப்போது (1), (2) லிருந்து x ஐ நீக்குவோம்.

(1) ஐ (2) ஆல் பெருக்கினால்,

$$2(D+4)x + 6y = 2t \quad \ldots \quad \ldots \quad (11)$$

(2)-ன் மேல் $D+4$ ஆல் இயங்கினால்,

$$2(D+4)x+(D+4)(D+5)y=(D+4)e^t$$
$$=e^t+4e^t=5e^t \quad \dots \quad \dots \quad (12)$$

(12) − (11):

$$[(D+4)(D+5)-6]y=5e^t-2t$$
$$(D^2+9D+14)y=5e^t-2t$$

துணைத் தீர்வு $Y=Ce^{-2t}+De^{-7t}$.

இங்கு C, D இரு புதிய மாறிலிகள்.

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2+9D+14)u=5e^t-2t$$

$$u=\frac{1}{D^2+9D+14}(5e^t-2t)$$

$$u_1=\frac{1}{D^2+9D+14}5e^t$$

$$=\frac{1}{1+9+14}5e^t=\frac{5}{24}e^t$$

$$u_2=\frac{1}{D^2+9D+14}(-2t)$$

$$=-\frac{2}{14\left(1+\frac{9D}{14}+\frac{D^2}{14}\right)}(t)$$

$$=-\frac{1}{7}\left(1+\frac{9D}{14}+\frac{D^2}{14}\right)^{-1}t$$

$$=-\frac{1}{7}\left(1-\frac{9D}{14}\right)t$$

$$=-\frac{1}{7}\left(t-\frac{9}{14}\right)=-\frac{t}{7}+\frac{9}{98}$$

$$u=u_1+u_2$$

பொதுத் தீர்வு $y=Y+u$

$$=Ce^{-2t}+De^{-7t}+\frac{5}{24}e^t-\frac{t}{7}+\frac{9}{98} \quad \dots \quad (13)$$

இப்போது, (6), (13) இவைகளில் நான்கு மாறிலிகள் A, B, C, D உள்ளன. இந்தத் தீர்வுகள் கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகளுக்கு ஏககாலத்தில் பொருத்தமாய் இருக்க வேண்டியதால், A, B, C, D எல்லாம் தனித்தவையாக இருக்க முடியாது. அவைகளுக்கிடையேயுள்ள தொடர்பைக் காண, (6), (13) இவைகளை (1)-ல் பிரதியிட வேண்டும்.

$$\therefore\ -2Ae^{-2t}-7Be^{-7t}+\frac{5}{14}-\frac{e^{t}}{8}$$
$$+4\left(Ae^{-2t}+Be^{-7t}+\frac{5t}{14}-\frac{31}{196}-\frac{e^{t}}{8}\right)$$
$$+3\left(Ce^{-2t}+De^{-7t}+\frac{5}{24}e^{t}-\frac{t}{7}+\frac{9}{98}\right)=t$$

அதாவது,

$$(3C+2A)e^{-2t}+(3D-3B)e^{-7t}\equiv 0$$

$\therefore$ e^{-2t}, e^{-7t} இவைகளுடைய குணகங்கள் தனித்தனியே பூச்சியமாக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore\ 3C+2A=0,\quad 3D-3B=0$$

அதாவது $C=-\frac{2A}{3},\quad D=B$

(13)-ல் இந்த மதிப்புகளை பிரதியிட்டால்,

$$y=-\frac{2A}{3}e^{-2t}+Be^{-7t}+\frac{5}{24}e^{t}-\frac{t}{7}+\frac{9}{98}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+x+y=e^{2t}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}-4x-3y=0$$

(B. E.' 73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

கொடுத்துள்ள சமன்பாடுகள்

$$(D^2+1)x+y=e^{2t}\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad (1)$$

$$-4x+(D^2-3)y=0\quad \ldots\quad \ldots\quad \ldots\quad (2)$$

(1)-ன் மேல் இரு புறமும் $D^2 - 3$ ஆல் இயங்கினுல்,

$$(D^2-3)(D^2+1)x + (D^2-3)y = (D^2-3)e^{2t}$$
$$= 4e^{2t} - 3e^{2t}$$
$$= e^{2t} \quad \ldots \quad (3)$$

(3) — (2);

$$[(D^2-3)(D^2+1)+4]x = e^{2t}$$
$$(D^4 - 2D^2 + 1)x = e^{2t} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

துணைத் தீர்வு X ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^4 - 2D^2 + 1)X = 0$$

துணைச் சமன்பாடு,

$$D^4 - 2D^2 + 1 = 0$$
$$(D^2 - 1)(D^2 - 1 = 0$$
$$(D+1)(D-1)(D+1)(D-1) = 0$$
$$D = -1,\ 1,\ -1,\ 1$$

அதாவது $D = -1, -1; \ 1, 1$

$$\therefore \quad X = e^t(A+Bt) + e^{-t}(C+Dt)$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^4 - 2D^2 + 1)u = e^{2t}$$
$$\therefore \quad u = \frac{1}{D^4 - 2D^2 + 1}e^{2t}$$
$$= \frac{1}{2^4 - 2\times 2^2 + 1}e^{2t}$$
$$= \frac{1}{16 - 8 + 1}e^{2t} = \frac{e^{2t}}{9}$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு

$$x = X + u = e^t(A+Bt) + e^{-t}(C+Dt) + \frac{e^{2t}}{9} \quad \ldots \quad (5)$$

(5)-ன் வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{dx}{dt} = e^t\cdot B + (A+Bt)e^t + e^{-t}\cdot D - e^{-t}(C+Dt)$$
$$+ \frac{2e^{2t}}{9}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = Be^t + (A + Bt)e^t + e^t \cdot B - De^{-t}$$
$$- e^{-t}D + e^{-t}(C + Dt) + \frac{4}{9}e^{2t}$$
$$= 2Be^t + (A + Bt)e^t - 2De^{-t} + e^{-t}(C + Dt)$$
$$+ \frac{4}{9}e^{2t} \quad \ldots \quad (6)$$

(1)-லிருந்து,

$$y = e^{2t} - x - \frac{d^2x}{dt^2}$$
$$= e^{2t} - e^t(A + Bt) - e^{-t}(C + Dt) - \frac{e^{2t}}{9}$$
$$- 2Be^t - (A + B)e^t + 2De^{-t} - e^{-t}(C + Dt)$$
$$- \frac{4}{9}e^{2t}$$

[(1), (6) இவற்றைப் பயன்படுத்தி]

$$= -2(A + Bt)e^t - 2(C + Dt)e^{-t} - 2Be^t$$
$$+ 2De^{-t} + \frac{4}{9}e^{2t} \quad \ldots \quad (7)$$

பயிற்சிகள் 37

தீர்வு காண்க :

1. $\frac{dx}{dt} - 7x + y = 0$

$\frac{dv}{dt} - 2x - 5y = 0$

(B. E. '62. சென்னைப் பல்கலைக்கழகம் ;
B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. $\frac{dx}{dt} + 2x - 3y = t$

$\frac{dy}{dt} - 3x + 2y = e^{2t}$

(B. E. '63. 64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்;
B. E. '64, அண்ணாமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

3. $\frac{dx}{dt} + 5x + y = e^t$

$\frac{dy}{dt} + 3y - x = 2e^t$

(B. E. '57, 64 சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

4. $\frac{dx}{dt} - \frac{dy}{dt} + 2y = \cos 2t$

$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 2x = \sin 2t$

(B. E. '70, 71 சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2x + y = 0$

$\frac{dy}{dt} + 5x + 3y = 0$

(B. E. '61, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

6. $2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} - 3x = e^{-t}$

$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + 2y = \cos 2t$

(B. E. '70, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. $4\frac{dx}{dt} + 9\frac{dy}{dt} + 2x + 31y = e^t$

$3\frac{dx}{dt} + 7\frac{dy}{dt} + x + 24y = 3$

(B. E. '64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

8. $x'(t) + 5x(t) + y'(t) + 7y(t) = 2e^t$

$2x'(t) + x + 3y'(t) + y(t) = e^t$

(B. E. '71, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

9. $(D-3)x - (D-1)y = \cos t$

$x - (D-3)y = 0$

(B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

10. $\frac{d^2y}{dt^2} - 3x - 4y = 0$

$\frac{d^2y}{dt^2} + x + y = 0$

(B. E. '64, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

11. $\frac{d^2x}{dt^2} + m^2y = 0$

$\frac{d^2y}{dt^2} - m^2x = 0$

12. $\frac{d^2x}{dt^2} + y = \sin t$

$\frac{d^2y}{dt^2} + x = \cos t$

(B. E. 65', சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

13. $D^2y + (D+6)\,x = e^t$

$Dy + Dx = t^2$ (B. E.'69, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

பயிற்சிகள் 38

சிறப்புத் தீர்வைக் காண்க :

1. $\frac{dx}{dt} + 2y = e^t$

$\frac{dy}{dt} - 2x = e^{-t}$

$t = 0$ என்றபோது $x = 0 = y$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு

2. $\frac{dx}{dt} + 2y = 5e^t$

$\frac{dy}{dt} - 2x = 5e^t$

$t = 0$ என்றபோது $x = -1.\ y = 3$ என்ற நிபந்தனைக்குட் பட்டு

(B. E. '70, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

3. $\frac{dx}{dt} + y = \sin t + 1$

$\frac{dy}{dt} + x = \cos t$

$t = 0$ என்றபோது, $x = 1$, $y = 2$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு
(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

4. $\frac{dy}{dt} + px = \sin pt$

$\frac{dx}{dt} - py = \cos pt$

இங்கு p ஒரு மாறிலி; $t = 0$ என்றபோது $x = 1$, $y = 0$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு. (B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

8. நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு களின் பயன்முறைகள்

Applications of Linear Differential Equations)

§67. நான்காவது அத்தியாயத்தில், பல துறைகளிலிருந்து ஏற்படும் முதல் வரிசை முதற்படி வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளை கவனித்தோம். இந்த அத்தியாயத்தில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட வரிசையுள்ள வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளின் பயன்முறைகளை ஆராய்வோம்.

§68. L, R, C மின் சுற்றுக்கள் :

மின் சுற்றுக்களில் ஏற்படும் முதல் வரிசை சமன்பாடுகளை முன்பு அறிந்தோம். இப்போது, மின்தடை, மின்தூண்டம், மின் தேக்கம் முதலிய மூன்று உறுப்புக்களும் கொண்ட ஒரு தொடர் மின் சுற்றைக் கவனிப்போம்.

மின் தடை R, மின் தூண்டம் L, மின் தேக்கம் C உள்ள ஒரு மின்சுற்றில் பொருத்தப்பட்ட மின்னழுத்தம் E என்று கொள்வோம். கால அளவு t-ல் சுற்றில் பாயும் மின்னோட்டம் i, மின்னூட்டம் q என்றால், L, R, C மூலம் ஏற்படும் மின்னழுத்தக் குறைவுகளின் கூடுதல்

$$= L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}$$

∴ கிர்க்காஃப் விதிப்படி,

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

ஆனல், $i = \dfrac{dq}{dt}$ ... ... (2)

(2) ஐ (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(1)-ன் இரு பக்கங்களையும் t ஐப் பொருத்து வகையிட்டால்,

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}\cdot\frac{dq}{dt}=\frac{dE}{dt}$$

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{dE}{dt} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(3), (4) சமன்பாடுகளைத் தீர்வு செய்து q, i இவற்றைக் கண்டு பிடிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

L, R, C என்ற மூன்று துணையலகுகளுள்ள ஒரு தொடர் மின் சுற்றில் மின்னூட்டம் q, மின்னோட்டம் i இரண்டையும் கொடுக்கும் சமன்பாடுகள்.

$$L\ddot{q}+R\dot{q}+\frac{1}{C}q=E\sin\omega t$$

$i=\dot{q}$ என்பனவாம். $\omega^2=\dfrac{1}{LC}$ என்ற கட்டுப்பாட்டுக்குட் பட்டு, ஒத்திசைவுக்கு (resonance) மின்னோட்டம் சரிசெய்யப் பட்டிருக்கிறது. $R^2<\dfrac{4L}{C}$ என்றும் $t=0$ என்றபோது $q=i=0$ என்றால்,

$$q=\frac{E}{R\omega}\left[-\cos\omega t+e^{-\frac{Rt}{2L}}\left\{\cos pt+\frac{R}{2Lp}\sin pt\right\}\right]$$

$$i=\frac{E}{R}\left[\sin\omega t-\frac{1}{p\sqrt{LC}}e^{-\frac{Rt}{2L}}\sin pt\right]$$

என்று நிறுவுக. இங்கு $p^2=\dfrac{1}{LC}-\dfrac{R^2}{4L^2}$.

(B. E. '62, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்;
(B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

$\frac{d}{dt}$ என்பதை D என்று குறிப்பிட்டால்,

கொடுத்துள்ள சமன்பாடு.

$$\left(LD^2 + RD + \frac{1}{C}\right) q = E \sin \omega t$$

துணைத் தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$\left(LD^2 + RD + \frac{1}{C}\right) Y = 0$$

துணைச் சமன்பாடு, $LD^2 + RD + \frac{1}{C} = 0$

$$D = -\frac{R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}$$

$$= -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2 - \frac{4L}{C}}{4L^2}}$$

$$= -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{\frac{4L}{C} - R^2}{4L^2}}$$

$$\left(\because \; R^2 < \frac{4L}{C} \text{ என்று கொள்கை.}\right)$$

$$= -\frac{R}{2L} \pm i\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$= -\frac{R}{2L} \pm ip$$

$$\therefore \quad Y = e^{-\frac{Rt}{2L}} (A \cos pt + B \sin pt)$$

சிறப்புத் தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$\left(LD^2 + RD + \frac{1}{C}\right) u = E \sin \omega t$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{LD^2 + RD + \frac{1}{C}} E \sin \omega t$$

$$= \frac{1}{-L\omega^2 + RD + \frac{1}{C}} E \sin \omega t$$

($D^2 = -\omega^2$ என்று பிரதியிட்டு)

$$= \frac{1}{RD} E \sin \omega t \qquad \left(\because \omega^2 = \frac{1}{LC} \text{ என்பதால், } L\omega^2 = \frac{1}{C} \right)$$

$$= \frac{E}{R} \times -\frac{\cos \omega t}{\omega}$$

$\therefore$ பொதுத் தீர்வு $q = Y + u$

$$q = e^{-\frac{Rt}{2L}} (A \cos pt + B \sin pt) - \frac{E}{R\omega} \cos \omega t \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$t = 0$ என்றபோது, $q = 0$.

$$\therefore \quad 0 = A - \frac{E}{R\omega}$$

$$\therefore \quad A = \frac{E}{R\omega} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-ன் வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{dq}{dt} = i = e^{-\frac{Rt}{2L}} (-AP \sin pt + Bp \cos pt)$$

$$+ (A \cos pt + B \sin pt) \cdot e^{-\frac{Rt}{2L}} \times -\frac{R}{2L}$$

$$+ \frac{E}{R} \sin \omega t \quad \ldots \quad (3)$$

$t = 0$ என்றபோது, $i = 0$.

$$\therefore \quad 0 = Bp - \frac{R}{2L} \cdot A$$

$$\therefore \quad B = \frac{R}{2Lp} \times \frac{E}{R\omega} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(2), (4) இவற்றை (1)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$q = e^{-\frac{Rt}{2L}} \left(\frac{E}{R\omega} \cos pt + \frac{E}{R\omega} \cdot \frac{R}{2Lp} \sin pt \right) - \frac{E}{R\omega} \cos \omega t$$

$$= \frac{E}{R\omega} \left[e^{-\frac{Rt}{2L}} \left(\cos pt + \frac{R}{2Lp} \sin pt \right) - \cos \omega t \right] \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

(3)-லிருந்து,

$$i = e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin pt \left(- Ap - \frac{BR}{2L} \right) + e^{-\frac{Rt}{2L}} \cos pt \left(Bp - \frac{AR}{2L} \right) + \frac{E}{R} \sin \omega t$$

$$= e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin pt \left(- \frac{Ep}{R\omega} - \frac{R}{2Lp} \cdot \frac{E}{R\omega} \cdot \frac{R}{2L} \right) + \frac{E}{R} \sin \omega t$$

$$\left(\because \quad Bp - \frac{AR}{2L} = 0 \right)$$

$$= e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin pt \left(- \frac{Ep}{R\omega} - \frac{R^2 E}{4L^2 pR\omega} \right) + \frac{E}{R} \sin \omega t$$

$$= e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin pt \left[- \frac{Ep}{R\omega} - \frac{E}{pR\omega} \left(\frac{1}{LC} - p^2 \right) \right] + \frac{E}{R} \sin \omega t$$

$$= e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin pt \times - \frac{E}{pR\omega \cdot LC} + \frac{E}{R} \sin \omega t$$

$$= \frac{E}{R}\left[\sin \omega t - \frac{1}{p \cdot \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot LC} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin pt\right]$$

$$= \frac{E}{R}\left[\sin \omega t - \frac{1}{p\sqrt{LC}} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin pt\right]$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

மின் தூண்டம் L, மின்தேக்கம் C உள்ள ஒரு சுற்றில் பொருத்தப்பட்ட மின்னழுத்தம் $E \sin nt$. கால அளவு $t = 0$ என்ற போது, மின்னூட்டம், மின்னோட்டம் இரண்டும் பூச்சியம். கால அளவு t-ல் மின்னோட்டம் $i = \frac{nE}{L(n^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos nt)$ என்று நிறுவுக. இங்கு $CL\omega^2 = 1$.

மேலும் $n = \omega$ என்றால் $i = \frac{Et \sin \omega t}{2L}$ என்று காட்டவும்.

கால அளவு t-ல் மின்னூட்டம் q, மின்னோட்டம் i என்று இருக்கட்டும். $i = \frac{dq}{dt}$.

L, C மூலம் ஏற்படும் மின்னழுத்தக் குறைவுகளின் கூடுதல்

$$= L\frac{di}{dt} + \frac{q}{C}$$

$$= L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C}$$

∴ கிர்க்காஃப் விதிப்படி,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = E \sin nt$$

$$\left(LD^2 + \frac{1}{C}\right)q = E \sin nt \quad \ldots (1) \quad \left(D = \frac{d}{dt}\right)$$

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க, $\left(LD^2 + \frac{1}{C}\right) Y = 0$

துணைச்சமன்பாடு $LD^2 + \frac{1}{C} = 0$

$$D^2 = -\frac{1}{CL} = -\omega^2 \qquad (\because \; CL\omega^2 = 1)$$

$$\therefore \quad D = \pm\sqrt{-\omega^2} = \pm i\omega$$

$$\therefore \quad Y = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

சிறப்புத்தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$\left(LD^2 + \frac{1}{C}\right) u = E\sin nt$$

$$u = \frac{E}{LD^2 + \frac{1}{C}} \sin nt$$

$$= \frac{E}{-Ln^2 + \frac{1}{C}} \sin nt$$

$$= \frac{E}{-Ln^2 + L\omega^2} \sin nt \qquad (n \neq \omega)$$

$$= \frac{E}{L(\omega^2 - n^2)} \sin nt$$

$$q = Y + u = A\cos\omega t + B\sin\omega t + \frac{E\sin nt}{L(\omega^2 - n^2)} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

$t = 0$ என்றபோது, $q = 0$

$$\therefore \quad 0 = A$$

$$\therefore \quad q = B\sin\omega t + \frac{E\sin nt}{L(\omega^2 - n^2)} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{dq}{dt} = i = B\omega\cos\omega t + \frac{En\cos nt}{L(\omega^2 - n^2)} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5)$$

$t = 0$ என்றபோது. $i = 0$

$$\therefore \quad 0 = B\omega + \frac{En}{L(\omega^2 - n^2)}$$

$$\therefore \quad B = -\frac{En}{L\omega(\omega^2 - n^2)}$$

B-ன் மதிப்பை (5)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$i = -\frac{En\omega}{L\omega(\omega^2-n^2)}\cos\omega t + \frac{En\cos nt}{L(\omega^2-n^2)}$$

$$= \frac{En}{L(\omega^2-n^2)}(\cos nt - \cos\omega t)$$

$$= \frac{En}{L(n^2-\omega^2)}(\cos\omega t - \cos nt) \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

$n = \omega$ என்றால், சிறப்புத்தீர்வை புதியதாகக் காணவேண்டும். அதை v என்போம்.

$$v = \frac{E}{LD^2 + \frac{1}{C}}\sin nt$$

$$= \frac{E}{LD^2 + L\omega^2}\sin\omega t$$

$$= \frac{E}{L}\cdot\frac{1}{D^2+\omega^2}\sin\omega t$$

$$= \frac{E}{L}\times -\frac{t\cos\omega t}{2\omega}$$

[§ 60- சூத்திரம் (IV) ஐப் பயன்படுத்தி]

$$= -\frac{Et\cos\omega t}{2L\omega}$$

$$\therefore \quad q = Y + v = A\cos\omega t + B\sin\omega t - \frac{Et\cos\omega t}{2L\omega} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

$t = 0$ என்றபோது, $q = 0$

$$\therefore \quad 0 = A$$

$$\therefore \quad q = B\sin\omega t - \frac{Et\cos\omega t}{2L\omega} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$$

வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{dq}{dt} = i = B\omega\cos\omega t - \frac{E}{2L\omega}(\cos\omega t - \omega t\sin\omega t) \quad \ldots \quad (9)$$

$t = 0$ என்றபோது, $i = 0$

$$\therefore \quad 0 = B\omega - \frac{E}{2L\omega}$$

$$B = \frac{E}{2L\omega^2}$$

B-ன் மதிப்பை (9)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$i = \frac{E}{2L\omega^2}\,\omega\cos\omega t - \frac{E}{2L\omega}\cos\omega t + \frac{E}{2L\omega}\,.\,\omega t\sin\omega t$$

$$= \frac{Et\sin\omega t}{2L}$$

பயிற்சிகள் 39

1. ஒரு மின்தேக்கியின் மின்னூட்டம் q கீழ்க்கண்ட சமன்பாட்டுக்குப் பொருத்தமாயிருக்கிறது.

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = 0.$$

$q(0) = Q$, $q(O) = 0$ என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டும்

$4L > CR^2$, $\alpha = \dfrac{R}{2L}$, $\omega^2 = \dfrac{4L - CR^2}{4L^2C}$ என்பவைகளை உபயோகப்படுத்தியும், மேற்கண்ட சமன்பாட்டிலிருந்து,

$$q = Qe^{-\alpha t}\left(\cos\omega t + \frac{\alpha}{\omega}\sin\omega t\right)$$ என்று நிறுவுக.

மேலும், மின்னோட்டம் $i = -Qe^{-\alpha t}\left(\omega + \dfrac{\alpha^2}{\omega}\right)\sin\omega t$ என்று காட்டவும். (B. E. '65, வெங்கடேசாப் பல்கலைக்கழகம்)

2. மின்தேக்கம் C உள்ள ஒரு மின்தேக்கி, தன் மின் தூண்டம் (self inductance) L, பொருத்தப்பட்ட மின்னழுத்தம் $E\sin\dfrac{t}{\sqrt{LC}}$ மூலம் மின்னூட்டமடைகிறது. கால அளவு t-ல் மின்னூட்டம் $= \dfrac{1}{2}EC\left(\sin\dfrac{t}{\sqrt{LC}} - \dfrac{t}{\sqrt{LC}}\cos\dfrac{t}{\sqrt{LC}}\right)$ என்று நிறுவுக.

3. ஒரு மின் சுற்றில் காலம் $t = 0$-ல் $E \sin pt$ மின்னழுத்தம் பொருத்தப்படுகிறது. வழக்கமான குறியீட்டு முறைப்படி,

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = pE \cos pt$$

என்ற சமன்பாட்டை நிறுவுக.

மேலும் (i) $CR^2 > 4L$ (ii) $CR^2 < 4L$ என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு மேற்படி சமன்பாட்டின் தீர்விலிருந்து i ஐக் கண்டு பிடிக்கவும்.

4. L, R, C மூன்று உறுப்புக்களுமுள்ள ஒரு மின் சுற்றில் மின்னூட்டம் q, மின்னழுத்தம் E (ஒரு மாறிலி) என்றால் கீழ்க் கண்ட சமன்பாடு கிடைக்கிறது :

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = E$$

மின்னூட்டம் q ஊசலாடத் (oscillate) தேவையான நிபந்தனை யாது ?

அந்த நிபந்தனைக்குட்பட்டு

$$q = e^{-at} \left(A \cos \frac{kt}{L} + B \sin \frac{kt}{L} \right) + CE$$

என்று நிரூபிக்கவும்.

$$\left(\frac{R}{2L} = a, \quad \frac{4L}{C} - R^2 = 4k^2 \right)$$

என்று வைத்துக் கொள்ளவும்.

(B. E. '70. மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. L, R, C மூன்று உறுப்புக்களுமுள்ள ஒரு மின் சுற்றில் மின்னோட்டம் x ஐக் கொடுக்கும் சமன்பாடு,

$$L \frac{d^2 x}{dt^2} + R \frac{dx}{dt} + \frac{x}{C} = E \cos pt \text{ என்பதாகும்.}$$

(L, R, C, p, E மாறிலிகள், t கால அளவு)

R, + ராசி என்றால், மேற்படி சமன்பாட்டின் தீர்வில் உள்ள அடுக்குக்குறி உறுப்புக்கள் (exponential terms), $t \to \infty$ என்ற போது, பூச்சியத்தை நோக்குகின்றன என்று காட்டவும். அடுக்குக்குறி உறுப்புக்களை நீக்கிவிடலாம் என்ற தீர்மானத்துடன், சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்கவும்.

இந்தத் தீர்மானதுடன். கொடுத்துள்ள E, p, R மதிப்புகளுக்குத் தகுந்தபடி, x-ன் மிகப் பெரிய மதிப்பு $\sqrt{LC} = \frac{1}{p}$ என்ற போது ஏற்படுமென்று காட்டவும்.

(B. E. '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

6. L, R, C மூன்று உறுப்புக்களுமுள்ள ஒரு மின் சுற்றில் மின்னழுத்தம் $E \sin \omega t$ பொருத்தப்படுகிறது. மின்னோட்டம் i-க்குப் பொருத்தமான சமன்பாடு யாது? அலைவுகளைத் தடுக்கக் கூடிய அளவுக்குள்ள மின் தடை R-ன் மதிப்பு யாது?

R-ன் இந்த மதிப்புக்கு $i = \frac{E}{2k}\left(\sin \omega t - \omega t \cdot e^{-\omega t}\right)$ என்று நிரூபிக்கவும்.

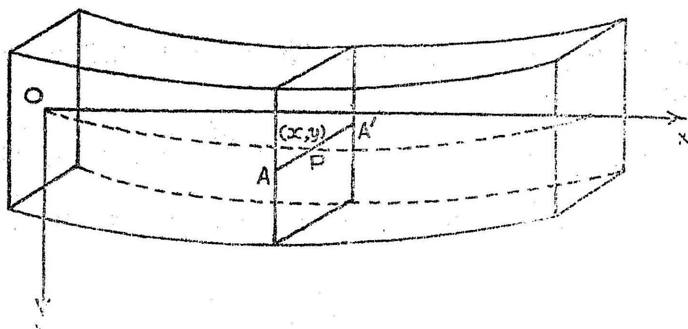
[ω, k இரண்டு மாறிலிகளும் $LC\omega^2 = 1$, $k^2 = \frac{L}{C}$ என்ற நிபந்தனைகளுக்குட்பட்டு இருக்கின்றன. மேலும் $t = 0$ என்ற போது மின்னூட்டம், மின்னோட்டம் இரண்டும் பூச்சியமெனக் கொள்ளவும்.]

7 L, C இரு உறுப்புக்களுமுள்ள ஒரு மின் சுற்றில் $E_0 \cos \omega t$ மின்னழுத்தம் பொருத்தப்படுகிறது. மின்னூட்டம் Q-வுக்குப் பொருத்தமான சமன்பாடு $\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{CL} = \frac{E_0}{L} \cos \omega t$ என்று நிறுவுக $\omega = \frac{1}{\sqrt{CL}}$ என்றும் $t = 0$ என்றபோது $Q = Q_0$, மின்னோட்டம் $i = i_0$ என்றால், கால அளவு t-ல் $Q = Q_0 \cos \omega t + \frac{i_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{E_0}{2L\omega} t \sin \omega t$ என்று நிறுவுக.

§ 69. உத்திரங்களின் வளைதல் (Bending of beams) :

ஒரு நீளமான உத்திரம், நேர் பாரத்தைத் தாங்கும்போது, வளையக் கூடும். வளைந்த உருவில், கீழ்ப் பாதியிலுள்ள இழைகள் நீளவும் மேல் பாதியில் உள்ள இழைகள் சுருங்கவும் கூடும். இவைகள் இரண்டுக்குமிடையில் சில இழைகள் சுருக்கம், நீட்டம் இவை இரண்டுமில்லாமல் இருக்கும். இந்த இழைகளிருக்குமிடத்துக்கு நடுநிலை பரப்பு (neutral surface) என்று பெயர். உத்திரத்தின்மேல் பாரம் வைக்கப்படுவதற்கு முன்பு, x-அச்சில் உள்ள இழைகள் (உத்திரத்தின் மைய்ய அச்சு) இப்போது இந்த நடுநிலைப்

பரப்பில் ஒரு வளைவு உருவத்தில் இருக்கின்றன. இதற்கு மீள் இயல்புடைய வளைவு (deflection curve, elastic curve) எனப் பெயர். இந்த வளைவைக் கண்டுபிடிப்பதற்கு, வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் பயன்படுகின்றன.



படம் 8.

மீள் இயல்புடைய வளைவை P என்ற இடத்திலும் நடுநிலைப் பரப்பை AA' என்ற கோட்டிலும் வெட்டும்படியான, உத்திரத்தின் ஒரு குறுக்குப் பகுதியை (cross section) எடுத்துக் கொள்வோம். இந்தப் பகுதியின் ஏதாவது ஒரு பக்கத்தில் உத்திரத்தின்மேல் இயங்கும் எல்லா விசைகளின்,

AA' ஐப் பொருத்து, வளைவு திருப்புத்திறன் (bendidg moment) M என்றால்,

$M = \frac{EI}{R}$ என்பது பெர்னௌலி - ஆய்லர் சூத்திரம்.

(Bernowli - Euler formula)

இங்கு $E =$ உத்திரத்தின் மீட்சிக் குணகம் (modulus of elasticity of the beam).

$I = AA'$ ஐப் பொருத்து, குறுக்குப் பகுதியின் நிலைமத் திருப்புத்திறன் (moment of inertia)

$R =$ மீள் இயல்புடைய வளைவின் $P(x, y)$-ல் வளையாரம் (radius of curvature)

வகை நுண் கணிதத்திலிருந்து,

$$R = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$ என்பது சூத்திரம்.

உத்திரத்தின் வளைவு மிகச்சிறியதாக இருந்தால், மீள் இயல்புடைய வளைவின் சரிவும் சிறியதே.

அப்போது, மேற்கண்ட சூத்திரத்தில் $\frac{d^2y}{dx^2}$ உடன் ஒப்பிடும் போது, $\frac{dy}{dx}$-ன் மிகச் சிறியதாகும். ஆகவே அதை நீக்கி விடலாம்.

$$\therefore \quad R = \frac{1}{\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

$\therefore$ பெர்னௌலி - ஆய்லர் சூத்திரத்தில், R-ன் மேற்கண்ட மதிப்பைப் பயன்படுத்தினால்,

$$M = EI\frac{d^2y}{dx^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற சூத்திரம் கிடைக்கும்.

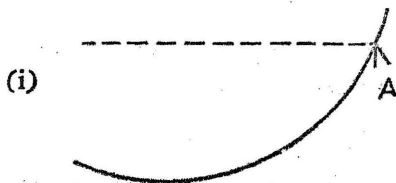
இந்த வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டிலிருந்து உத்திரத்தின் வளைதலைக் காணலாம். இச் சூத்திரத்தில் உத்திரத்தின் ஒரு பகுதியிலுள்ள எல்லா விசைகளின் திருப்புத் திறனகளின் (moments) குறியியல் கூடுதலுக்கு (algebraic sum) M சமமாக இருக்கும். ஆகவே, M ஐ x-ல் ஒரு சார்பாகக் கண்டுபிடித்து, சமன்பாடு (1)-ன் தீர்வு காண வேண்டும்.

M ஐக் கண்டுபிடிப்பதற்கு, உத்திரத்தின் ஒரு குறுக்குப் பகுதியில் இயங்கும் விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் குறிகளை சரியாக நிர்ணயம் செய்யவேண்டும். எல்லா கணக்குகளிலும் y-அச்சு கீழ்த் திசையில் எடுத்துக்கொள்வோம். கீழ்த் திசையை நோக்கி இயங்கும் விசைகள் + திருப்புத் திறன்களும் மேல் திசையை நோக்கி இயங்கும் விசைகள் — திருப்புத் திறன்களும் கொடுக்கும்.

§ 70. எல்லை நியதிகள் (Boundary Conditions) :

சில வகைகள் :

உத்திரங்களின் வளைதல் சம்பந்தப்பட்ட கணக்குகளில் இரு முனைகளும் சில நிபந்தனைக்குட்பட்டிருக்கலாம் :



படம் 9.

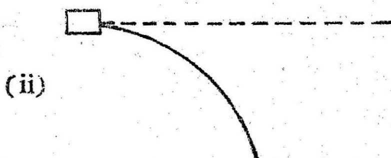
A என்ற முனை, தடையின்றி தாங்கி நிற்கலாம் (simply supported or freely supported).

அப்போது இந்த முனையில் வளைவு கிடையாது.

$\therefore \quad y = 0$

மேலும் இந்த முனையில் வளைவு திருப்புத் திறனும் கிடையாது.

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$$



படம் 10.

ஒரு முனை சுவற்றில் பிணையப்பட்டிருக்கலாம். அல்லது கிடைமட்டத்துக்குப் பொருத்தப்பட்டிருக்கலாம் (fixed horizontally).

அப்போது இந்த முனையில் வளைவு கிடையாது.

$\therefore \quad y = 0.$

மேலும் இந்த முனையில் உத்திரம் கிடைமட்டத்திலிருப்பதால்,

சரிவு $= 0$.

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = 0$$

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

l நீளமுள்ள ஒரு உத்திரம் அதன் முனைகளில் தடையின்றி தாங்கி நிற்கின்றது. w அதன் எடை அடர்த்தி (weight per unit length). ஒரு முனையிலிருந்து x தூரத்தில் ஏற்படும் வளைவு y என்றால்,

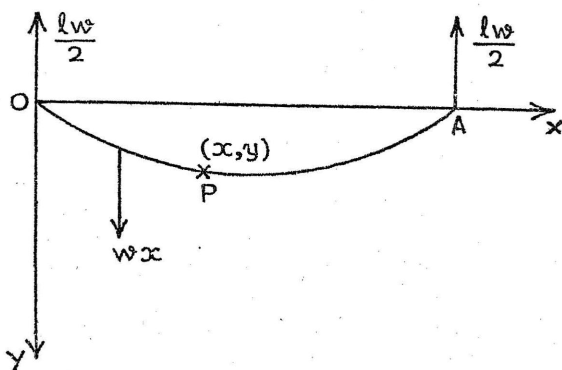
$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = w\left(\frac{x^2}{2} - \frac{lx}{2}\right)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது. உத்திரத்தின் மையத்தில் வளைவு

$$= \frac{5wl^4}{384\,EI}$$

என்று நிரூபிக்கவும். (B. E. '71, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

மீள் இயல்புடைய வளைவின் சமன்பாடு இங்குக் கொடுக்கப்பட்டிருந்தாலும், நாம் அதை முதலில் நிறுவுவோம்.



படம் 11.

படத்தில் காட்டியபடி OX, OY அச்சுகளை எடுத்துக் கொள்வோம். மீள் இயல்புடைய வளைவில் $P(x, y)$ ஏதேனுமொரு புள்ளி. உத்திரத்தின் மொத்த எடை $= lw$. ஆகவே, ஒவ்வொரு முனையிலும் மேல் அழுக்கம் $= \frac{lw}{2}$.

OP என்ற பகுதியில் இயங்கும் விசைகள் :

(i) O-ல் $\frac{lw}{2}$ என்ற மேல் அழுக்கம்.

(ii) OP-ன் எடை wx. இது OP-ன் மையத்தில் நேர்க் கீழ்த் திசையில் இயங்குகிறது.

$$\therefore \quad EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$= P$ ஐப் பொறுத்து OP-ல் இயங்கும் விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூடுதல்.

$$= wx \cdot \frac{x}{2} - \frac{lw}{2} \cdot x$$

$$= \frac{w}{2}(x^2 - lx) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

எல்லை நியதிகள் :

(i) $x = 0$ என்றபோது $y = 0$

(ii) $x = l$ என்றபோது $y = 0$

$\because$ உத்திரத்தின் முனைகள் தடையின்றி தாங்கி நிற்கின்றன.

(1) ஐ தொகையிட்டால்,

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{w}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{lx^2}{2}\right) + A \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2) ஐ தொகையிட்டால்,

$$EIy = \frac{w}{2}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{6}\right) + Ax + B \quad \ldots \quad (3)$$

எல்லை நிபந்தனை (i) ஐ (3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = B$$

நிபந்தனை (ii) ஐ (3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = \frac{w}{2}\left(\frac{l^4}{12} - \frac{l^4}{6}\right) + Al$$

$$Al = \frac{wl^4}{12} - \frac{wl^4}{24} = \frac{wl^4}{24}$$

$$\therefore \quad A = \frac{wl^3}{24}$$

$\therefore$ (3)-லிருந்து

$$EIy = \frac{w}{2}\left(\frac{x^4}{12} - \frac{lx^3}{6}\right) + \frac{wl^3x}{24} \quad \ldots \quad (4)$$

உத்திரத்தின் மையத்தில் $x = \frac{l}{2}$ எனும்போது.

(4)-லிருந்து,

$$EIy = \frac{w}{2}\left(\frac{l^4}{192} - \frac{l^4}{48}\right) + \frac{wl^4}{48}$$

$$= \frac{wl^4}{384} + \frac{wl^4}{96} = \frac{5wl^4}{384}$$

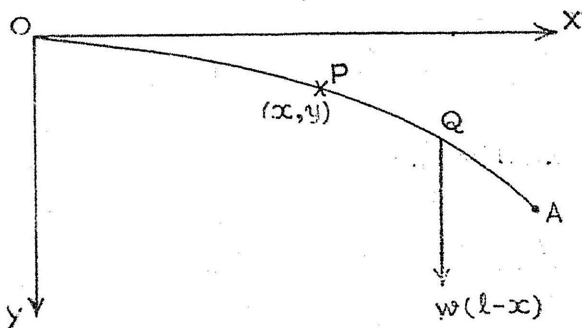
$$\therefore \quad y = \frac{5wl^4}{384\,EI}$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

நீளம் l-ம் எடையடர்த்தி w-ம் உள்ள ஒரு வளைச் சட்டத்தின் (cantilever) நிலையான முனையை ஆதியாகக் கொண்டு வளைதலைக் கொடுக்கும் சமன்பாடு,

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{2}(l-x)^2 \text{ என்பதாகும்.}$$

அதனுடைய மிகப் பெரிய வளைதல் $\frac{wl^4}{8EI}$ என்று நிரூபிக்கவும்.



படம் 12.

மீள் இயல்புடைய வளைவில் $P(x, y)$ ஏதேனுமொரு புள்ளி.

PA என்ற பகுதியின் எடை $w(l-x)$

இந்த விசை, அதன் நடுப்புள்ளி Q-ன் வழியாக நேர் கீழ்த் திசையில் இயங்குகிறது.

P-க்கு வலப்பக்கத்தில் திருப்புத் திறன்களை எடுத்தால்,

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$= P$ ஐப் பொருத்து. PA-ல் இயங்கும் விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூடுதல்

$$= w(l-x).\left(\frac{(l-x)}{2}\right)$$

$$= \frac{w}{2}(l-x)^2 \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

எல்லை நியதிகள் :

(i) $x = 0$ என்றபோது $y = 0$

(ii) $x = 0$ என்றபோது $\frac{dy}{dx} = 0$

(1) ஐத் தொகையிட்டால்,

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{w}{2} \times \frac{(l-x)^3}{3} + A \qquad \dots \qquad (2)$$

நிபந்தனை (ii) ஐ (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = -\frac{wl^3}{6} + A$$

$$\therefore \quad A = \frac{wl^3}{6}$$

$$\therefore \quad EI\frac{dy}{dx} = \frac{-w(l-x)^3}{6} + \frac{wl^3}{6} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (3)$$

(3) ஐத் தொகையிட்டால்,

$$EI\,y = \frac{w(l-x)^4}{24} + \frac{wl^3x}{6} + B \qquad \dots \qquad \dots \qquad (4)$$

நிபந்தனை (i) ஐ (4)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = \frac{wl^4}{24} + B$$

$$\therefore \quad B = -\frac{wl^4}{24}$$

(4)-லிருந்து,

$$EI\,y = \frac{w(l-x)^4}{24} + \frac{wl^3x}{6} - \frac{wl^4}{24} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

மிகப்பெரிய வளைதல் A-ல் ஏற்படும்.

$\therefore \quad x = l$ என்று (5)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$EIy = \frac{wl^4}{6} - \frac{wl^4}{24} = \frac{3wl^4}{24} = \frac{wl^4}{8}$$

$$\therefore \quad (y)_{\text{மிகப்பெரியது}} = \frac{wl^4}{8EI}$$

பயிற்சிகள் 40

1. நீளம் $2a$, எடையடர்த்தி w-ம் உள்ள ஒரு உத்திரத்தின் முனைகள் கிடைமட்டத்திற்குப் பொருத்தப்பட்டிருக்கின்றன. ஒரு முனையிலிருந்து x தூரத்தில் ஏற்படும் வளைவு y என்றால்,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{6EI}(2a^2 - 6ax + 3x^2)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

மிகப்பெரிய வளைதலைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

(B. E. '62, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

2. நீளம் l, எடையடர்த்தி w-ம் உள்ள ஒரு வளை சட்டம். அதனுடைய தொங்கும் முனையில் பாரம் W ஐத் தாங்குகிறது. நிலையான முனையை ஆதியாக எடுத்துக்கொண்டு, வளைதலைக் கொடுக்கும் சமன்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும். மிகப்பெரிய வளைதலையும், நிலையான முனையில் ஏற்படும் சுழலினைத் திருப்புத் திறனையும் (moment of the couple) கண்டுபிடிக்கவும்.

(B. E. '65, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)

3. நீளம் l, எடையடர்த்தி w-ம் உள்ள ஒரு உத்திரம் அதன் முனைகளில் தடையின்றி தாங்கி நிற்கின்றது. மேலும் அதன் மையத்தில் W நிறையுள்ள ஒரு பாரம் இருக்கிறது. மிகப் பெரிய வளைதலைக் கண்டுபிடிக்கவும்,

4. நீளம் l உள்ள ஒரு இலேசான உத்திரம், அதன் தொங்கு முனையில் W நிறையுள்ள ஒரு பாரத்தைத் தாங்குகிறது. மிகப் பெரிய வளைதலை கண்டுபிடிக்கவும்.

(B. E. '64, அண்ணமலைப் பல்கலைக்கழகம்)

5. நீளம் $2l$ உள்ள உத்திரம் அதன் முனைகளில் தடையின்றி தாங்கி நிற்கின்றது. அதன் மையத்தில் W எடையுள்ள பாரம் இருக்கிறது. உத்திரத்தின் எடையுடன் ஒப்பிடும்போது W மிகப் பெரியது.

$$\text{மிகப் பெரிய வளைதல்} = \frac{Wl^3}{6EI} \text{ என்று காட்டவும்.}$$

6. நீளம் l, எடையடர்த்தி w-ம் உள்ள ஒரு உத்திரம் $x = 0$ என்ற முனையில் பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது. மற்ற முனையில் அதேமட்டத்தில் தடையின்றி தாங்கி நிற்கிறது. வளைவுச் சமன்பாடு $EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{wl^2}{8} - \frac{5}{8}wlx + \frac{wx^2}{2}$ என்றால்,

y ஐ x சார்பில் கண்டுபிடிக்கவும்.

$$x = \frac{l}{16}(15 - \sqrt{33})$$

என்ற இடத்தில் மிகப்பெரிய வளைவு ஏற்படுகிறதென்றும் காட்டவும்.

7. ஒரு குறிப்பிட்ட முறையில் பொருத்தப்பட்டுள்ள உத்திரத்தின் வளைவுச் சமன்பாடு

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{2}\left(\frac{l^2}{4} - x^2\right) - K \text{ என்பதாகும்.}$$

K ஒரு மாறிலி. $x = 0, \frac{l}{2}$ என்றபோது, $\frac{dy}{dx} = 0$;

$x = \frac{l}{2}$ என்றபோது, $y = 0$ என்றால் y ஐ x சார்பில் கண்டுபிடிக்கவும். K-ன் மதிப்பு யாது? (B. E. '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

§71. குறுக்குத் தாங்கிகளும் (struts), தூண்களும் (columns):

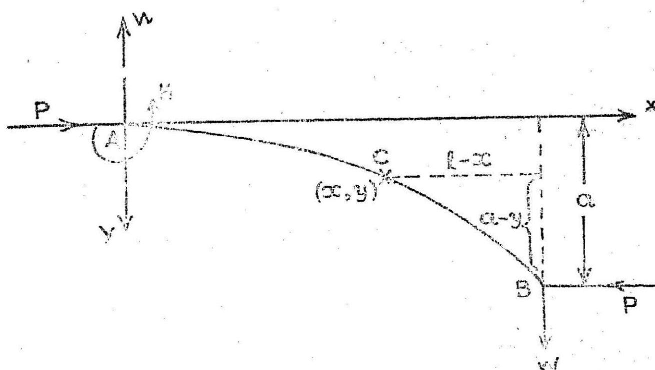
ஒரு எந்திரவியல் அமைப்பில் குறுக்குத் தாங்கிகளும் தூண்களும் பாகங்களாக இருக்கின்றன. இவைகளின் முனைகளில் அமுக்கம் (thrust) அல்லது இறுக்கம் (compression) ஏற்படும். இவைகளின் வளைவைப் பற்றி, பின் வரும் எடுத்துக்காட்டுகள் நன்கு விளக்கும்.

எடுத்துக்காட்டுகள்

எடுத்துக்காட்டு 1 :

நீளம் l உள்ள கிடைமட்ட குறுக்குத் தாங்கி, ஒரு முனையில் கிடைமட்டத்துக்குப் பொருத்தப்பட்டு மற்றொரு முனையில் W எடையுள்ள பாரத்தைத் தாங்குகிறது. கிடைமட்ட அமுக்கம் P என்றால், தொங்கும் முனையில் வளைவு $= \dfrac{W}{nP}$ $(\tan nl - nl)$ என்று காட்டவும். $\left(\dfrac{P}{EI} = n^2\right.$ என்று வைத்துக் கொள்ளவும்.$\left.\right)$

(B. E. '72, சென்னைப் பல்கலைக்கழகம்)



படம் 13.

A முனையின் மேல் அமுக்கம், கீழ்த் திசையில் செங்குத்தாயுள்ள W ஐ ஈடு செய்வதால், மேல் அமுக்கம் $= W$.

குறுக்குத் தாங்கியை A-ல் பொருத்துவதற்கு K என்ற சுழலிணை தேவை.

தொங்கும் முனையில் வளைவு a என்றிருக்கட்டும்.

வளைவில் $C(x, y)$ ஏதேனுமொரு புள்ளி.

$$\therefore \quad EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$= C$ ஐப் பொருத்து. CB-ல் இயங்கும் விசைகளின் திருப்புத் திறன்களின் குறியியல் கூடுதல்.

$$= W(l-x) + P(a-y)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{W}{EI}(l-x) + \frac{P}{EI}(a-y)$$

$$= \frac{Wn^2}{P}(l-x) + n^2(a-y)$$

$$\left[\because \frac{P}{EI}\, n^2 \text{ . ஆகவே } EI = \frac{P}{n^2}\right]$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + n^2y = \frac{Wn^2l}{P} + n^2a - \frac{Wn^2x}{P} \qquad \ldots \quad (1)$$

துணைத்தீர்வு Y ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + n^2)\, Y = 0 \quad \left(\text{இங்கு } D = \frac{d}{dx}\right)$$

துணைச் சமன்பாடு $D^2 + n^2 = 0$

$$D^2 = -n^2$$

$$D = \pm\sqrt{-n^2} = \pm\, in$$

$$\therefore \quad Y = A\cos nx + B\sin nx$$

சிறப்புத்தீர்வு u ஐக் கண்டுபிடிக்க,

$$(D^2 + n^2)\, u = \frac{Wn^2l}{P} + u^2a - \frac{Wn^2x}{P}$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{D^2 + n^2}\left[\frac{Wn^2l}{P} + n^2a - \frac{Wn^2x}{P}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2\left(1 + \frac{D^2}{n^2}\right)}\left[\frac{Wn^2l}{P} + n^2a - \frac{Wn^2x}{P}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1+\frac{D^2}{n^2}\right)^{-1}\left(\frac{Wn^2l}{P}+n^2a-\frac{Wn^2x}{P}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(1-\frac{D^2}{n^2}+\ldots\right)\left(\frac{Wn^2l}{P}+n^2a-\frac{Wn^2x}{P}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\frac{Wn^2l}{P}+n^2a-\frac{Wn^2x}{P}\right)$$

$$= \frac{Wl}{P}+a-\frac{Wx}{P}$$

∴ பொதுத்தீர்வு $y = Y + u$

$$= A\cos nx + B\sin nx + \frac{Wl}{P}+a-\frac{Wx}{P} \quad \ldots \quad (2)$$

எல்லை நியதிகள் :

(i) $x = 0$ என்றபோது $y = 0$

(ii) $x = 0$ என்றபோது $\frac{dy}{dx} = 0$

நிபந்தனை (i) ஐ (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = A + \frac{Wl}{P} + a$$

$$\therefore \quad A = -\left(\frac{Wl}{P}+a\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2)-ன் வகைக்கெழுக் காணின்,

$$\frac{dy}{dx} = -An\sin nx + Bn\cos nx - \frac{W}{P} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

நிபந்தனை (ii) ஐ (4)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = Bn - \frac{W}{P}$$

$$\therefore \quad B = \frac{W}{Pn} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

A, B இவற்றின் மேற்கண்ட மதிப்புகளை (2)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$y = -\left(\frac{Wl}{P} + a\right)\cos nx + \frac{W}{Pn}\sin nx + \frac{Wl}{P} + a - \frac{Wx}{P} \quad \ldots \quad (6)$$

$x = l$ என்றபோது $y = a$

$$\therefore \quad a = -\left(\frac{Wl}{P} + a\right)\cos nl + \frac{W}{Pn}\sin nl + \frac{Wl}{P} + a - \frac{Wl}{P}$$

$$\therefore \quad \left(\frac{Wl}{P} + a\right)\cos nl = \frac{W}{Pn}\sin nl$$

$$\frac{Wl}{P} + a = \frac{W}{Pn}\tan nl$$

$$\therefore \quad a = \frac{W}{Pn}\tan nl - \frac{Wl}{P}$$

$$= \frac{W}{nP}(\tan nl - nl)$$

எடுத்துக்காட்டு 2 :

நீளம் l, எடையடர்த்தி w-ம் உள்ள ஒரு குறுக்குத் தாங்கி இரு முனைகளிலும் தடையின்றி தாங்கி நிற்கின்றது. ஒவ்வொரு முனையிலும் கிடைமட்ட அமுக்கம் P என்றால், மிகப்பெரிய வளைவு

$$= \frac{w}{Pa^2}\left(\text{sce}\ \frac{al}{2} - 1\right) - \frac{wl^2}{8P}$$

என்று காட்டவும்.

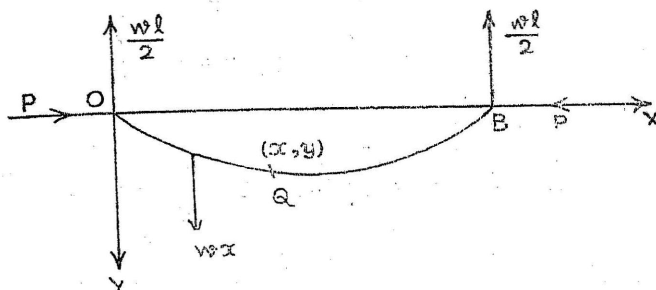
$$\left(\text{இங்கு } \frac{P}{EI} = a^2 \text{ என்று எடுத்துக் கொள்ளவும்.}\right)$$

மேலும் மிகப்பெரிய வளைவு திருப்புத்திறன், எண்ணளவில்

$$\frac{w}{a^2}\left(\sec\frac{al}{2} - 1\right)$$

மதிப்புடையதென்று காட்டவும்.

படத்தில் காட்டியபடி, OX, OY அச்சுகளை எடுத்துக்கொள்வோம்.



படம் 14.

குறுக்குத் தாங்கியின் மொத்த எடை $= wl$.

$\therefore$ ஒவ்வொரு முனையிலும் மேல் அழுக்கம் $= \dfrac{wl}{2}$.

வளைவில் $Q\ (x, y)$ என்ற புள்ளியை எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M$$

$=$ Q ஐப் பொருத்து OQ பகுதியில் இயங்கும் விசைகளின் திருப்புத்திறன்களின் குறியியல் கூடுதல்.

$$= wx \cdot \frac{x}{2} - Py - \frac{wl}{2}x$$

$$= -Py + \frac{wx^2}{2} - \frac{wlx}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\therefore \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = \frac{w}{2EI}(x^2 - lx)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2y = \frac{wa^2}{2P}(x^2 - lx) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\left(\because \ \frac{P}{EI} = a^2\right)$$

(2)-ன் துணைத்தீர்வு $Y = A\cos ax + B\sin ax$

சிறப்புத்தீர்வு

$$u = \frac{1}{D^2 + a^2} \cdot \frac{wa^2}{2P}(x^2 - lx) \qquad \left(D = \frac{d}{dx}\right)$$

$$= \frac{wa^2}{2P} \cdot \frac{1}{a^2\left(1 + \frac{D^2}{a^2}\right)}(x^2 - lx)$$

$$= \frac{w}{2P}\left(1 + \frac{D^2}{a^2}\right)^{-1}(x^2 - lx)$$

$$= \frac{w}{2P}\left(1 - \frac{D^2}{a^2}\right)(x^2 - lx)$$

$$= \frac{w}{2P}\left(x^2 - lx - \frac{2}{a^2}\right)$$

$\therefore$ (2)-ன் பொதுத்தீர்வு

$$y = Y + u$$

$$= A\cos ax + B\sin ay + \frac{w}{2P}\left(x^2 - lx - \frac{2}{a^2}\right) \dots (3)$$

எல்லை நியதிகள் :

(i) $x = 0$ என்றபோது $y = 0$

(ii) $x = l$ என்றபோது $y = 0$

(i) ஐ (3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = A - \frac{w}{Pa^2}$$

$$\therefore \quad A = \frac{w}{Pa^2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

(ii) ஐ (3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$0 = A\cos al + B\sin al - \frac{w}{Pa^2}$$

$$B\sin al = \frac{w}{Pa^2} - \frac{w}{Pa^2}\cos al$$

$$= \frac{w}{Pa^2}(1 - \cos al)$$

$$\therefore \quad B = \frac{w}{Pa^2} \cdot \frac{(1 - \cos al)}{\sin al}$$

$$= \frac{w}{Pa^2} \cdot \frac{2 \sin^2 \frac{al}{2}}{2 \sin \frac{al}{2} \cos \frac{al}{2}}$$

$$= \frac{w}{Pa^2} \tan \frac{al}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

A, *B* இவற்றின் மதிப்புகளை (3)-ல் பிரதியிட்டால்,

$$y = \frac{w}{Pa^2} \cos ax + \frac{w}{Pa^2} \tan \frac{al}{2} \sin ax + \frac{w}{2P}\left(x^2 - lx - \frac{2}{a^2}\right) \quad \ldots \quad (6)$$

மிகப்பெரிய வளைவு, *OB*-ன் மையத்தில் ஏற்படும்.

$\therefore \quad x = \frac{l}{2}$ என்று (6)-ல் பிரதியிட்டல்,

$$(y)_{\text{மி. பெ. வளைவு}} = \frac{w}{Pa^2} \cos \frac{al}{2} + \frac{w}{Pa^2} \tan \frac{al}{2} \sin \frac{al}{2} + \frac{w}{2P}\left(\frac{l^2}{4} - \frac{l^2}{2} - \frac{2}{a^2}\right)$$

$$= \frac{w}{Pa^2}\left(\cos \frac{al}{2} + \frac{\sin^2 \frac{al}{2}}{\cos \frac{al}{2}}\right) + \frac{w}{2P}\left(-\frac{l^2}{4} - \frac{2}{a^2}\right)$$

$$= \frac{w}{Pa^2} \cdot \frac{1}{\cos \frac{al}{2}} - \frac{wl^2}{8P} - \frac{w}{Pa^2}$$

$$= \frac{w}{Pa^2}\left(\sec \frac{al}{2} - 1\right) - \frac{wl^2}{8P}$$

$= y_0$ என்போம். .... (7)

வளைவு திருப்புத் திறன்

$$= EI \frac{d^2 y}{dx^2}$$

$$= -Py + \frac{wx^2}{2} - \frac{wlx}{2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (8)$$

[(1)-லிருந்து]

இந்தத் திருப்புத்திறனின் மிகப்பெரிய மதிப்பு, $x = \frac{l}{2}$ என்ற போது ஏற்படும்.

∴ மிகப்பெரிய திருப்புத்திறன்

$$= \left(EI \frac{d^2y}{dx^2} \right)_{x = \frac{l}{2}}$$

$$= -Py_0 + \frac{w}{2} \cdot \frac{l^2}{4} - \frac{wl^2}{4} \qquad [\,(8)\text{-லிருந்து}\,]$$

$$= -Py_0 - \frac{wl^2}{8}$$

$$= -P\left[\frac{w}{P_0{}^2}\left(\sec\frac{al}{2} - 1 \right) - \frac{wl^2}{8P} \right] - \frac{wl^2}{8}$$

[(7)-லிருந்து y_0-ன் மதிப்பைப் பிரதியிட்டு]

$$= -\frac{w}{a^2}\left(\sec\frac{al}{2} - 1 \right) + \frac{wl^2}{8} - \frac{wl^2}{8}$$

$$= -\frac{w}{a^2}\left(\sec\frac{al}{2} - 1 \right)$$

$$= \frac{w}{a^2}\left(\sec\frac{al}{2} - 1 \right) \text{ எண்ணளவில்}$$

பயிற்சிகள் 41

1. நீளம் l, வளைவு விறைப்பு (flexural rigidity) EI-ம் உள்ள ஓர் இலேசான இணை உத்திரத்தின் (tierod) முனைகளில் இழுவிசை (tension) P-ம் மையத்தில் W நிறையுள்ள பாரமும் உள்ளன. கீழ்க்கண்டவைகளை நிரூபிக்கவும் :

(i) ஒரு முனையிலிருந்து x தூரத்தில் ஏற்படும் வளைவு y ஐக் கொடுக்கும் சமன்பாடு

$$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2y = -\frac{Wn^2}{2P}x \qquad \left(\text{இங்கு } \frac{P}{EI} = n^2 \right)$$

(ii) வளைவு $y = \frac{W}{2n\ P \cos h \frac{nl}{2}} \left(nx \cos h \frac{nl}{2} - \sin h\ nx \right)$

(iii) மையத்தில் வளைவு $= \frac{W}{2P} \left(\frac{1}{n} \tan \frac{nl}{2} - \frac{l}{2} \right)$

(iv) மிகப்பெரிய வளைவு திருப்புத்திறன் எண்ணளவில்

$\frac{W}{2n} \tan \frac{nl}{2}$ மதிப்புடையது.

2. நீளம் l, வளைவு விறைப்பு EI, எடையடர்த்தி w உள்ள ஒரு இணை உத்திரத்தின் முனைகளில் இழுவிசை P உள்ளது. அதன் வளைவைக் கொடுக்கும் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2y}{dx^2} - n^2 y = \frac{wn^2}{2P} (x^2 - lx) \quad \left(\text{இங்கு } \frac{P}{EI} = n^2 \right)$$

என்றும், மிகப்பெரிய வளைவு திருப்புத்திறன்

$$= - \frac{w \left(1 - \text{sech} \frac{nl}{2} \right)}{n^2}$$ என்றும் காட்டவும்.

3. நீளம் l, எடையடர்த்தி w உள்ள ஒரு இலேசான உத்திரத்தின் இருமுனைகளும் கிடைமட்டத்திற்குப் பொருத்தப் பட்டிருக்கின்றன. முனைகளில் உட்பக்கமாக P என்ற சமமான விசைகள் கிடைமட்டத்தில் இயங்குகின்றன. ஒரு முனையிலிருந்து x தூரத்தில் ஏற்படும் வளைவு y என்றால்,

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} + Py = G + \frac{wx^2}{2} - \frac{wlx}{2}$$ என்று காட்டவும்.

இங்கு E. I வழக்கமான குறியீட்டுப்படி மாறிலிகள்.

G என்பது பொருத்துவதற்குத் தேவையுள்ள சுழலிணைத் திருப்புத்திறன்.

மேலும் $G = \frac{w}{n^2} \left(1 - \frac{nl}{2} \cot \frac{nl}{2} \right)$ என்று காட்டவும்.

$EIn^2 = P$ என்று கொள்ளவும்.

4. நீளம் l, ஈளடயடர்த்தி w-ம் உள்ள ஒரு குறுக்குதாங்கியின் முனைகளில் சமமானதும் எதிரானவுமுள்ள P என்ற விசைகள் இயங்குகின்றன. வளைவைக் கொடுக்கும் சமன்பாடு

$$\frac{d^2y}{dx^2}+n^2y=\frac{w}{2EI}(x^2-lx) \text{ என்றும்}$$

$x=0$, $x=l$ என்றபோது $y=0$ என்றும் எடுத்துக்கொண்டு

$$y=\frac{w\cos n\left(x-\frac{l}{2}\right)}{Pn^2\cos\frac{nl}{2}}+\frac{w}{2P}\left(x^2-lx-\frac{2}{n^2}\right)$$

என்று காட்டவும். $EIn^2=P$ என்று கொள்ளவும்.

5. ஒரு குறுக்கு தாங்கியின் வளைவைக் கொடுக்கும் சமன்பாடு $EI\frac{d^2y}{dx^2}+Py=d$ என்பதாகும்.

$x=0$ என்றபோது $y=0$, $x=l$ என்றபோது $\frac{dy}{dx}=0$

என்றால்,

$$y=\frac{d}{P}\left[1-\frac{\cos n(l-x)}{\cos nl}\right] \text{ என்று காட்டவும்.}$$

$EIn^2=P$ என்று வைத்துக் கொள்ளவும்.

6. நீளம் l உள்ள ஒரு குறுக்கு தாங்கியின் $x=0$ என்ற முனை கிடைமட்டத்திற்குப் பொருத்தப்பட்டிருக்கிறது. மற்ற முனை P அமுக்கம் உள்ளதாயும் தடையின்றி தாங்கி நிற்கிறது. வளைவைக் கொடுக்கும் சமன்பாடு,

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=\frac{a^2R}{P}(l-x) \text{ என்றால்}$$

$$y=\frac{R}{P}\left(\frac{\sin ax}{a}-l\cos ax+l-x\right) \text{ என்று காட்டவும்.}$$

மேலும் $\tan al=al$ என்று நிரூபிக்கவும்.

(B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

7. நீளம் l உள்ள ஒரு உத்திரம் இருமுனைகளிலும் தடையின்றி தாங்கி நிற்கிறது. அதில் அச்சு அமுக்கம் (axial thrust) P உள்ளது. வளைவைத்தரும் சமன்பாடு

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} + Py = -\frac{wl^2}{8} \sin \frac{\pi x}{l} \text{ என்பதாகும்.}$$

உத்திரத்தின் மையத்தில் வளைவு $\dfrac{wl^2}{8(Q-P)}$ என்று காட்டவும்.

($Ql^2 = EI\pi^2$ என்று எடுத்துக்கொள்ளவும்).

(B. E. '72, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

மையத்தில் வளைவு திருப்புத்திறன் $= -\dfrac{wl^2}{8} \dfrac{Q}{Q-P}$ என்றும் காட்டவும்.

8. ஒரு முனை கிடைமட்டத்திற்குப் பொருத்தப்பட்டதாயும் மற்ற முனையில் P இழுவிசையுள்ள ஒரு உத்திரத்தின் (நிறை அடர்த்தி w உள்ளது) வளைவு சமன்பாடு

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = Py - \frac{wx^2}{2} \text{ என்பதாகும்.}$$

$x = 0$ என்றபோது $y = 0 = \dfrac{dy}{dx}$ என்றால்

$$y = \frac{w}{Pn^2}(1 - \cosh nx) + \frac{wx^2}{2P} \text{ என்று காட்டவும்.}$$

$\left(\dfrac{P}{EI} = n^2 \text{ என்று எடுத்துக்கொள்ளவும்.}\right)$

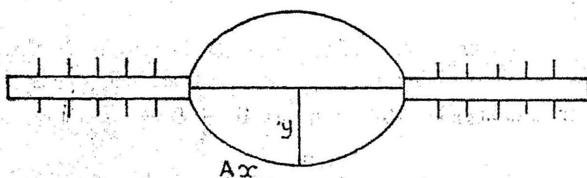
9. ஒரு முனை கிடைமட்டத்திற்குப் பொருத்தப்பட்டதாயும் மற்ற முனையில் இறுகும் விசை (compressive force) P-யுமுள்ள ஓர் உத்திரத்தின் வளைவுச் சமன்பாடு

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py - \frac{wx^2}{2}$$

என்பதாகும். $x = 0$ என்றபோது $y = 0 = \dfrac{dy}{dx}$ என்ற நிபந்தனைக்குட்பட்டு, மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் தீர்வைக் காண்க.

§ 72. எந்திரத் தண்டின் சுற்றுகிற வேகம் (Whirling Speed of shaft)

ஒரு எந்திரத் தண்டு சுழலும்போது, குறைந்த வேகங்களில், விறைப்பாகவே இருக்கின்றது. ஒரு குறிப்பிட்ட வேகத்தை அடையும்போது, சுற்றுவதால் ஏற்படும் மைய விலக்கு விசை (centrifugal force) யும் தண்டின் விறைப்பினால் ஏற்படும் மீட்சி விசையும் (restoring force) ஒன்றுக்கொன்று சமமாகவிருக்கும். இந்த வேகத்திற்கு சுற்றுகிற வேகம் (whirling speed) அல்லது மாறுநிலை வேகம் (critical speed) எனப் பெயர். இந்த வேகத்திற்கு மேற்பட்டோ அல்லது இதே வேகத்தில் அதிக காலத்திற்கோ, எந்திரத் துண்டை சுற்ற விட்டால், அது முறியக்கூடும். இந்த குறிப்பிட்ட சுற்றுகிற வேகத்தை, வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் மூலம் அறியலாம்.



படம் 15.

தண்டின் கோணத் திசைவேகம் ω என்கும்போது, நடுநிலை அச்சில், ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளியிலிருந்து x தூரத்தில் ஏற்படும் வளைவு y என்போம்.

தண்டின் எடை அடர்த்தி ρ என்றிருக்கட்டும்.

Δx நீளத்திற்கு, மையவிலக்கு விசை $= \rho \dfrac{\Delta x}{g} \omega^2 y$ ... (1)

இந்த விசை, தண்டின் மீட்புவிசையால் சரிக்கட்டப்படுகிறது. திரங்களைப்பற்றிய கொள்கையிலிருந்து,

மீட்பு விசையின் அளவு விகிதம் $= EI \dfrac{d^4 y}{dx^4}$

$\therefore$ Δx நீளத்திற்கு மீட்பு விசை $= EI \dfrac{d^4 y}{dx^4} \Delta x$ ... (2)

(1), (2) இவற்றை சமப்படுத்தினால்,

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} \quad \triangle x = \rho \frac{\triangle x}{g} \omega^2 y$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{\rho\omega^2}{g\,EI} y$$

$\frac{\rho\omega^2}{g\,EI} = a^4$ என்று பிரதியிட்டால்,

$$\frac{d^4y}{dx^4} = a^4 y$$

அல்லது $\frac{d^4y}{dx^4} - a^4 y = 0$ ... ... (3)

தண்டின் சுற்றுகிற வேகத்திற்குரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு (3) ஆகும்.

(3)-ன் தீர்வைக்காண,

துணைச் சமன்பாடு $D^4 - a^4 = 0 \quad \left(D = \frac{d}{dx}\right)$

$$(D^2 + a^2)(D^2 - a^2) = 0$$

$$D^2 = -a^2, \quad D^2 = a^2$$

$$D = \pm ia, \quad \pm a$$

∴ (3)-ன் பொதுத் தீர்வு

$$y = A\cos ax + B\sin ax + C\cosh ax + D\sinh ax \quad \dots (4)$$

(4)-ல் உள்ள A, B, C, D என்ற மாறிலிகளை எல்லை நியதிகளைக் கொண்டு தீர்மானிக்கலாம். எல்லை நியதிகள் கீழ்க்காணும் முக்கிய வகைகளைச் சேர்ந்தவை.

(i) தண்டின் இரு முனைகளிலும் உராய் தலை பாகங்கள் (bearings) குட்டையாக இருக்கலாம். இது உத்திரத்தில் இரு முனைகளும் தடையின்றி தாங்கி நிற்கும் அமைப்பைப் போன்றது. ஆகவே இதற்கு எல்லை நிபந்தனைகள் $y = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 0$. அதாவது முனைகளில் வளைவும், வளைவு திருப்புத்திறனும் கிடையாது.

(ii) தண்டின் ஒரு முனையில் உராய் தலைபாகங்கள் நீளமாக இருக்கலாம். இது உத்திரத்தின் முனை கிடைமட்டத்துக்கு பொருத்தப்பட்டது போலாகும். ஆகவே இதற்கு எல்லை நிபந்தனைகள் $y = 0$, $\frac{dy}{dx} = 0$ என்பனவாம்.

(iii) தண்டின் ஒருமுனை யாதொரு தடையின்றி இருந்தால், (perfectly free) அந்த முனையில் வளைவு திருப்புத்திறனும், வெட்டு விசையும் (shearing force) கிடையாது. ஆகவே இதற்கு எல்லை நிபந்தனைகள் $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 0$ என்பனவாம்.

எடுத்துக்காட்டு

நீளம் l உள்ள ஒரு தண்டின் சுற்று வேகத்தைக் கொடுக்கிற சமன்பாடு $\frac{d^4y}{dx^4} - a^4y = 0$ என்பதாம். இங்கு $a^4 = \frac{\rho\omega^2}{g\,EI}$ தண்டின் இரு முனைகளிலும் உராய்தலை பாகங்கள் நீண்டவையாக இருந்தால், தண்டு சுற்றும்போது $\cos al \cdot \cosh al = 1$ என்று நிரூபிக்கவும்.

$$\frac{d^4y}{dx^4} - a^4y = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

(1)-ன் பொதுத் தீர்வு

$$y = A\cos ax + B\sin ax + C\cosh ax + D\sinh ax \quad \ldots \quad (2)$$

எல்லை நிபந்தனைகள் :

$x = 0$-ல் $y = 0$ (i)

$x = 0$ $\frac{dy}{dx} = 0$ (ii)

$x = l$-ல் $y = 0$ (iii)

$x = l$-ல் $\frac{dy}{dx} = 0$ (iv)

(2)-ன் வகைக்கெழு காணின்,

$$\frac{dy}{dx} = -Aa\sin ax + Ba\cos ax + Ca\sinh ax$$
$$Da\cosh ax \quad \ldots \quad (3)$$

(i), (ii) இவைகளை முறையே (2), (3) இவற்றில் பிரதியிட்டால்,

$$0 = A + C \quad \dots \quad (4)$$

$$0 = Ba + Da$$

அதாவது $0 = B + D \quad \dots \quad (5)$

$$\therefore \quad C = -A, \quad D = -B$$

$\therefore$ (2)-லிருந்து,

$$y = A\cos ax + B\sin ax - A\cosh ax - B\sinh ax \quad \dots \quad (6)$$

(3)-லிருந்து,

$$\frac{dy}{dx} = -Aa\sin ax + Ba\cos ax - Aa\sinh ax - Ba\cosh ax \quad \dots \quad (7)$$

(iii), (iv) இவைகளை முறையே (6), (7) இவற்றில் பிரதியிட்டால்,

$$0 = A\cos al + B\sin al - A\cosh al - B\sinh al$$

அதாவது $A(\cos al - \cosh al) = B\sinh al - \sin al) \quad \dots \quad (8)$

$$0 = -Aa\sin al + Ba\cos al - Aa\sinh al - Ba\cosh al$$

அதாவது $A(\sin al + \sinh al) = B(\cos al - \cosh al) \quad \dots \quad (9)$

(8) ஐ (9) ஆல் வகுத்தால்,

$$\frac{\cos al - \cosh al}{\sin al + \sinh al} = \frac{\sinh al - \sin al}{\cos al - \cosh al}$$

$$\therefore \quad (\cos al - \cosh al)^2 = (\sinh al + \sin al)(\sinh al - \sin al)$$

$$\cos^2 al - 2\cos al\cosh al + \cosh^2 al = \sinh^2 al - \sin^2 al$$

$$\cos^2 al + \sin^2 al + \cosh^2 al - \sinh^2 al = 2\cos al\cosh al$$

$$1 + 1 = 2\cos al\cosh al$$

$$\therefore \quad \cos al\cos h\, al = 1$$

பயிற்சிகள் 42

1. § 72-ல் எடுத்துக்காட்டில் தண்டின் இரு புறத்திலும் உராய்தலைபாகங்கள் குட்டையாக இருந்தால், சுற்றுகிற வேகம் ω ஐக் கண்டுபிடிக்கவும்.

2. § 72-ல் எடுத்துக்காட்டில் தண்டின் ஒரு புறத்து உராய் தலைபாகம் குட்டையாகவும் மறுபுறத்து உராய்தலைபாகம் நெட்டை யாகவும் இருந்தால், தண்டு சுற்றும்போது $\tanh al = \tan al$ என்று நிரூபிக்கவும்.

3. § 72-ல் எடுத்துக்காட்டில் தண்டின் ஒரு புறத்து உராய் தலைபாகம் நெட்டையாகவும் மறுபுறத்து உராய்தலைபாகம் முற்றிலும் யாதொரு தடையின்றி இருந்தால், தண்டு சுற்றுவதற்கு நிபந்தனை $\cos al \,.\, \cos h\, al = -1$ என்று நிரூபிக்கவும்.

4. தண்டின் சுற்று வேகத்தைக் கொடுக்கும் சமன்பாடு

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} - W\frac{\omega^2}{g}y = W \text{ என்பதாகும்.}$$

இங்கு W, தண்டின் எடை : ω அதன் கோணத்திசை வேகம். மேற்கண்ட சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$y = -\frac{g}{\omega^2} + A\cos ax + B\sin ax + C\cosh ax + D\sinh ax$$

என்று நிரூபிக்கவும். $\left(\frac{W\omega^2}{EI\,g} = a^4 \text{ என்று எடுத்துக்கொள்ளவும்.}\right)$

ஆதியை மையத்தில் எடுத்துக்கொண்டு, தண்டின் நீளம் $2l$ என்றும் இரு முனைகளில் உராய்தலைபாகங்கள் குட்டையாக இருப்பதாகவும் வைத்துக்கொண்டு,

$$y = \frac{g}{2\omega^2}\left(\frac{\cos ax}{\cos al} + \frac{\cosh ax}{\cosh al} - 2\right) \text{ என்று காட்டவும்.}$$

மேலும் தண்டின் மையத்தில் வளைவு திருப்புத்திறன்

$$= \frac{\sqrt{Wg\,EI}}{2\omega}(\sec h\, al - \sec al) \text{ என்று நிரூபிக்கவும்.}$$

விடைகள்

பயிற்சிகள் 1.

1. (a) வரிசை 2, படி 3 (b) வரிசை 2, படி 2

   (c) வரிசை 3, படி 1 (d) வரிசை 2, படி 1

2. (a) $x^2 \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2x \dfrac{dy}{dx} + 2y = 0$

   (b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} - 6y = 0$

   (c) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - m^2 y = 0$

   (d) $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 11 \dfrac{dy}{dx} + 6y = 0$

   (e) $(\cos x + \sin x) \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2 \cos x \dfrac{dy}{dx} + (\cos x - \sin x)\, y = 0$

   (f) $(\cos x + \sin x) \dfrac{d^2y}{dx^2} + 2 \sin x \dfrac{dy}{dx} + (\sin x - \cos x)\, y = 0$

   (g) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2m \tan mx \cdot \dfrac{dy}{dx} + 2m^2 y \tan^2 mx = 0$

3. $y = px + p - p^3$ இங்கு $p = \dfrac{dy}{dx}$.

4. $v \dfrac{dp}{dv} + rp = 0$

5. $y'' + n^2 y = 0$

6. $3y \dfrac{d^2y}{dx^2} = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

7. $r^2 \dfrac{d^2u}{dr^2} + r \dfrac{du}{dr} = u$

8. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + w^2x = 0$

9. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \dfrac{dx}{dt} + (\alpha^2 + w^2)\, x = 0$

10. $\dfrac{d^4y}{dx^4} - a^4y = 0$

பயிசிகள் 2.

1. இக்குடும்பத்திற்கு வளைவு (curvature) என்பதேயில்லை.

2. நேர்கோட்டுக் குடும்பத்துக்கு வரையும் தொடுகோடு, கொடுத்துள்ள நேர்க்கோடுதான்.

3. $(x^2 - 2xy)\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} + (y^2 - 2xy) = 0$

4. $y^2 - x^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} = 0$

5. $y^2 - x^2 - 2xy\dfrac{dy}{dx} + c = 0$

6. $2a\dfrac{d^2y}{dx^2} + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

7. $(1 + \cos\theta)\, dr = -r\sin d\theta$

8. $\dfrac{dr}{d\theta} = r$

9. $\dfrac{dr}{d\theta} + r\tan 2\theta = 0.$

பயிற்சிகள் 3.

1. $x^2 + y^2 = c$

2. $xy = c$

3. $(x+5)^2 + (y+3)^2 = c$

4. $(y+3)^5 = c\,(x-2)^4$

5. $r\cos\theta = c$

6. $\tan y = c\,(1-e^x)^3$

7. $y + \log(\sin x + \cos x) = c$

8. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = c$

9. $(x + \sqrt{1+x^2})\,(y + \sqrt{1+y^2}) = c$

10. $\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = c$

11. $(1 + x^2)(1 + y^2) = c$

12. $y \sin^{-1} x = c$

13. $\sec y = c\,(1 + x^2)$

14. $\tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{\sqrt{3}}\right) + \tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} = c$

15. $\log x + \log y = x + c$

16. $\log (y + a) = x^2 + c$

17. $\log x - \log y - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = c$

18. $\log x - \log y + \frac{x^2 - y^2}{2} = c$

19. $(x + a)(1 - ay) = cy$

20. $y \sin y = x^2 \log x + c$

21. $\sin \sqrt{x} + e^{\frac{1}{y}} = c$

22. $\sin^{-1}(xy) + 4x = c$

23. $e^x + e^{-y} = c$

24. $4e^y = 2e^{2x} + x^4 + c$

25. $2e^x(\sin x - \cos x) + e^{-2y}(2y + 1) = c$

26. $-4e^{-y} = e^{2x} + 2x + c$

பயிற்சிகள் 4.

1. $y - a\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{a}\right) = C$

2. $y - \tan\left(\frac{x+y}{2}\right) = c$

3. $\tan^{-1}\left(\frac{4x+y+1}{2}\right) = 2x + c$

4. $\log \sin (y - x) = \frac{x^2}{2} + c$

5. $\log \sin (y - x) + \frac{x^2}{2} = c$

6. $-\frac{1}{e^{x+y}} = kx + c$

7. $e^{xy} = x + c$

8. $y = c\,x\,e^{xy}$

9. $\log x = xy - \frac{x^2y^2}{2} + c$

பயிற்சிகள் 5.

1. $\tan^{-1}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\log(x^2+y^2) = c$

2. $\log(y-x) - \frac{x}{y-x} = c$

3. $(y-x)(2y+x)^2 = c$

4. $-\frac{x^2}{2y^2} + \log y = c$

5. $y = c(x^2+y^2)$

6. $\frac{y}{x} = \log y + c$

7. $x^2 - y^2 = cx$

8. $2y = x(x+y)$

9. $\frac{x}{y} = \log x + c$

10. $xy(y-x) = c$

11. $\frac{y}{x} - \log(xy) = c$

12. $x^3 - 6x^2y - 6xy^2 = y^3 = c$

13. $\log y - \frac{x^3}{3y^3} = c$

14. $\frac{y^3}{3x^3} = \log x + c$

15. $\frac{x}{y} + 3\log\frac{y}{x} + \log x = c$

16. $y^2 = 2z^2(\log y + c)$

17. $\log\left(\frac{y^2}{x}\right) + \frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{y^4} = c$

18. $y^2 - x^2 = cx^4$

19. $x^4 + y^4 = cx^8$

20. $y(y+2x)^3 = cx^2$

21. $2\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \log x + c$

22. $-\frac{x^2}{2y^2} = \log y + c$

23. $\log x + e^{-\frac{y}{x}} = c$

24. $\log\frac{y}{x} = cx$

25. $x + y e^{\frac{x}{y}} = c$

26. $x\left(1 + \cos\frac{y}{x}\right) = c \sin\frac{y}{x}$

பயிற்சிகள் 6.

1. $(2x - 3y + 1)^2 (x + 2y - 2) + c$
2. $(x - y - 1)^2 (x + y - 1)^5 = c$
3. $(x + y)^3 \left(x - y + \frac{2}{3}\right) = c$
4. $\log (x + 2y + 2) - \frac{x}{2(x + 2y + 2)} = c$
5. $(x + y - 1)^2 (2x + y - 3)^3 = c$
6. $x + 5y + 2 = c(x - y + 2)^4$
7. $2x + y - 3 = c(x - y - 3)^4$
8. $x^2 + xy + y^2 - 4x + y = c$
9. $x + y + \frac{3}{4} = c(x - 2y)^4$
10. $(x - 2y + 1)(2x + y - 3) = c$
11. $\frac{2}{3}(x + y) - \frac{1}{9}\log(3x + 3y + 2) = x + c$
12. $y - x - \log(x + y) = c$
13. $8y - 4x + \log(4x + 8y + 5) = c$
14. $42y - 21x - 9\log(14x + 21y + 22) = c$
15. $12y - 24x - 15\log(-8x + 12y + 7) = c$
16. $(x + 2)^2 - 2(x + 2)(y - 3) - (y - 3)^2 = c$
17. $\log(x - y) = x + y + c$

பயிற்சிகள் 7.

1. $x^5 + x^3y^2 - x^2y^3 - y^5 - c$
2. $2x^2y + 2xy^2 + x + y = c$
3. $3a^2x - 3x^2y - 3xy^2 - y^3 = c$

4. $y^2x + x^2y + x = c$

5. $x^4 + 2x^2y^2 - 2a^2x^2 + 2a^2y^2 + y^4 = c$

6. $x^4 + 2x^2y^2 - 2a^2x^2 - y^4 - 2b^2y^2 = c$

7. $ax^2 + bxy + gx + cy^2 + ey = A$

8. $6x^2y^2 - x^4 - 4y - 8y^3 = c$

9. $yx^3 + x^2 - y^3x = c$

(B. E. '73, மதுரைப் பல்கலைக்கழகம்)

10. $x^2y + xy - x \tan y + \tan y = c$

11. $\frac{x^3}{3} - x^2y - \cos y = c$

12. $2x + 2y + \sin 2x + \sin 2y - 4 \sin \alpha \sin x \sin y = c$

13. $\tan y \sin x + \sin (x + y) = c$

14. $\sin^2 y \cos x = c$

15. $4x^3y + x^2y^2 + x^4 - 4xy^3 + ye^{2x} - xe^y + y^3 = c$

16. $x + ye^{\frac{x}{y}} = c$

17. $xe^y + \sin xy = c$

பயிற்சிகள் 3.

1. $\frac{x}{y} - e^{x^3} = c$ 2. $e^x + \frac{my^2}{x^2} = c$

3. $-\frac{1}{x} + x - \frac{1}{y} - \log y = c$

4. $\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = x + y + c$

5. $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{xy} = c$

6. $\frac{x}{y} + \sin x + \frac{y^2}{2} = c$

7. $-\frac{1}{xy} = x + c$

8. $y + \log x + 1 = cx$

9. $xy^2 - 2x^3 - 2y = c$

10. $\log \sin y - x - \frac{y}{x} = c$

11. $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = a^2 \tan^{-1} \frac{y}{x} + c$

12. $x^2 y + e^x = cy$

13. $-\frac{1}{xy} + \log \frac{x}{y} = c$

14. $e^{xy^2} + x^4 - y^3 = c$

15. $e^{xy} + y^2 = c$

16. $xy^2 - 2y = cx$

17. $\log (x^2 + y^2) + \tan^{-1} \frac{y}{x} = c$

18. $\log (x^2 + y^2) + 2y^4 = c$

19. $x^3 y - ax^2 y^2 = c$

20. $x^2 - x^3 y = cy$

21. தொகை காரணி e^x ; $e^x (x \sin y + y \cos y - \sin y) = c$

22. $f(x) = \frac{1}{x^4}$; $e^x + \frac{my^2}{x^2} = c$

23. $n = 2$, $y^2 \tan x - \tan y = c$

பயிற்சிகள் 9.

1. $x^2 y^2 (y^2 - x^2) = c$

2. $\frac{1}{2} xy - \frac{1}{2xy} - \log y = c$

3. $\frac{1}{xy} + \frac{1}{2x^2 y^2} - \log y = c$

4. $x^2 - y^2 - 1 = cx$

5. $-3y^3 + 2x^2 e^{\frac{1}{x^3}} = cx^2$

6. $x^2 y + e^x = cy$

7. $x^{\frac{7}{2}} y^{11} (7x^2 + 11y^8) = c$

8. $5x^{-\frac{36}{13}} \cdot y^{\frac{24}{13}} - 12x^{-\frac{10}{13}} y^{-\frac{15}{13}} = c$

9. $e^x (x^2 + y^2) = c$

10. $x^4 y^2 + x^3 y^5 = c$

11. $\log x - \log y - \frac{1}{xy} = c$

பயிற்சிகள் 10.

1. $y \sin x = c + x$

2. $y \sin x = c + \frac{2}{3} \sin^3 x$

3. $y \sin x = c + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$

4. $y \sin x = 2x^2 - \frac{\pi^2}{2}$.

5. $y \sec x = c + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$

6. $y \sec x = c + \frac{x^2}{2}$

7. $y \sec^n x = c + \frac{1}{(n-1)} \sec^{n-1} x$

8. $y \cos x = c + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$

9. $y \cos x = c + e^x$

10. $y = -2 \cos^2 x + \cos x$

11. $y (1 + x^3) = c + \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$

12. $y (5 + x^3) = c + \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$

13. $y(x^2+1) = \frac{4x^3}{3} + c$

14. $y(x^2+1)^2 = c + \frac{4x^5}{5} + \frac{4x^3}{3}$

15. $y(x^2+1) = \tan^{-1} x - \frac{\pi}{4}$

16. $y(x^2+1)^2 = c + x$ 17. $xy = x \log x - x + c$

18. $y \log x = c - \frac{1}{2} \cos 2x$

19. $xy = c + e^x (x^2 - 2x + 2)$

20. $\frac{y}{x} = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + c$

21. $\frac{y}{(x+1)^n} = c + e^x$

22. $yx \sec x = c + \tan x$

23. $y\sqrt{1+x^2} = c - \log\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$

24. $y = \sqrt{1-x^2}\,(1 - \sqrt{1-x^2})$

25. $y\sqrt{x^2-a^2} = c + \frac{(x+a)^2}{2}$

26. $y\sqrt{1+x^2} = c + \sqrt{1+x^2}$

27. $y(x-1) = x^2(c + x^2 - x)$

28. $y\, e^{\tan^{-1}x} = c + \frac{1}{2} e^{2\tan^{-1}x}$

29. $y\, e^{\sin x} = c + e^{\sin x} (\sin x - 1)$

30. $y\, e^{\sin x} = e^{\sin x} - \cot x - x + c$

31. $ye^{x^2} = c + (x^2+2)\, e^{x^2}$

32. $ye^{-x}(1+x)^2 = c + \frac{x^2}{2} + x$

33. $y = x^2\left(1 + ce^{\frac{1}{x}}\right)$

34. $(x + \sqrt{a^2 + x^2})\, y = a^2 \log (x + \sqrt{a^2 + x^2}) + c$

35. $\dfrac{ye^x}{1 + x^2} = c - \dfrac{1}{2(1 + x^2)}$

36. $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}} + c\, e^{-\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}}$

37. $ye^{\cos x} = c + e^{\cos x}(1 - \cos x)$

38. $y \cosh x = c + \dfrac{2}{3} \cosh^3 x$

39. $y = 3x + cx\sqrt{1 - x^2}$

40. $y = c\sqrt{1 - x^2} + 1$

41. $y \tan^{-1} x = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2} \log 2 + \dfrac{1}{2} \log (1 + x^2)$

42. $xye^x = c + x$

43. $y \cos cx = c + 2 \sin x$

44. $x^2y = c + \dfrac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$

பயிற்சிகள் 11.

1. $\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{(1-x^2)^{\frac{1}{4}}} = c - (1-x^2)^{\frac{3}{4}}$

2. $\dfrac{1}{y} = (c + \sin^{-1} x)\sqrt{1 - x^2} - x$

3. $\dfrac{1}{y}\sqrt{1 + x^2} = c + \log (x + \sqrt{1 + x^2})$

4. $-\dfrac{1}{y} = 2 + c\sqrt{1 - x^2}$

5. $y^{1-n} e^{(1-n)\sin x} = c + \dfrac{2e^{(1-n)\sin x}}{1-n} \left[(1-n)\sin x - 1 \right]$

6. $y(cx + 1 + \log x) = 1$

7. $y^3 \cos^3 x = c - \frac{1}{2} \cos^6 x$

8. $y^3 (x+1)^3 = c + \frac{x^6}{6} + \frac{2}{5} x^5 + \frac{x^4}{4}$

9. $y^4 x^2 = c + 2e^x (x^2 - 2x + 2)$

10. $\frac{1}{y} \cos x = c - \frac{\sin^3 x}{3}$

11. $y^{1-n} e^{\sin x} = c + e^{\sin x}(-2\sin x + 3)$

12. $y^2 (1 + ce^{x^2}) = 1$

13. $y^2 \left[ce^{x^2} + 1 + x^2 \right] = 1$

14. $y^{-2} e^{-x} = c - \frac{e^{2x}}{2}$

15. $\frac{1}{y} e^{\cos x} = c + 2e^{\cos x} (\cos x - 1)$

16. $-\frac{1}{y^2} \sec^2 x = c + 2 \log (\sec x + \tan x)$

17. $-\frac{\sec^2 x}{y} = c + \frac{\tan^3 x}{3}$

18. $\frac{x}{y} = c + y^2$

19. $xe^{\tan^{-1} y} = c + e^{\tan^{-1} y} (\tan^{-1} y - 1)$

20. $x \sec y = c + \tan y$

21. $\tan y \cdot e^{x^2} = c + \frac{1}{2} e^{x^2} (x^2 - 1)$

22. $\dfrac{\sin y^2}{(x+1)^2} = c + \dfrac{x^2}{2} + x$

23. $(x+1)e^y = 2x + c$

24. $(y-x)\left(c\,e^{\frac{1}{3}x^2} - x^2 - 2\right) = 1$

பயிற்சிகள் 12.

1. $(y - 6x - c)(y - 3x - c) = 0$
2. $(xy - c)(x^2 y - c) = 0$
3. $(y^2 + 3x^2 - c)(y - cx^2) = 0$
4. $(y - cx)(y^2 - x^2 - c) = 0$
5. $\sin^{-1}\dfrac{y}{x} \pm \log x = c$
6. $(y + \sqrt{y^2 - x^2} - c)(y + \sqrt{y^2 - x^2} - cx^2) = 0$
7. $(xy - c)(x^2 - y^2 - c) = 0$
8. $(2y - x^2 - c)(y + x - 1 - ce^{-x}) = 0$
9. $(yx - c + x)(\log y - \log x + x - c) = 0$
10. $(y - c)(y + x^2 - c)(xy + cy + 1) = 0$
11. $\left(y - \dfrac{x^3}{3} - c\right)\left(\log\dfrac{y}{c} - \dfrac{x^2}{2}\right)\left(x + \dfrac{1}{y} + c\right) = 0$
12. $\left(y - \dfrac{x^3}{3} + c\right)\left[e^x(x + y - 1) + c\right] = 0$
13. $x^2 + y^2 = cx$
14. $(y^2 - x^2 - c)(xy - c) = 0$

பயிற்சிகள் 13.

1. பொதுத்தீர்வு $y = -\dfrac{c}{x} + c^2.$

   தனித்தீர்வு $y = -\dfrac{1}{4x^2}$

2. $\log(p-x) = \dfrac{x}{p-x} + c$; கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டோடு

3. $x + c = \dfrac{a}{2}\left[\log\dfrac{p-1}{\sqrt{1+p^2}} - \tan^{-1}p\right]$; கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டோடு

4. $x = \dfrac{p}{\sqrt{1-p^2}}(c + a\sin^{-1}p)$

$y = -ap + \dfrac{1}{\sqrt{1-p^2}}(c + a\sin^{-1}p)$

5. $x = ce^{-p} + \dfrac{1}{2}(\sin p - \cos p)$

$y = (1+p)ce^{-p} + \dfrac{1}{2}(1+p)\sin p + \dfrac{1}{2}(1-p)\cos p$

6. $c^2x^2 - 2cy + a = 0$

7. $c^2y^2 = 1 + cx^2$

பயிற்சிகள் 14.

1. பொதுத்தீர்வு $64y = c(c-4x)^2$
   தனித்தீர்வு $4x^3 = 27y$
2. $y^2 = 2cx + c^2$
3. $(y+c)^2 + (x-a)^2 = 1$

பயிற்சிகள் 15.

1. பொதுத்தீர்வு $y = cx - ac - c^2$;
   தனித்தீர்வு $(x-a)^2 = 4y$
2. பொதுத்தீர்வு $y = cx + \dfrac{a}{c}$;
   தனித்தீர்வு $y^2 = 4ax$
3. பொதுத்தீர்வு $y = cx + \sqrt{1+c^2}$
   தனித்தீர்வு $y\sqrt{1-x^2} = x^2 + 1$

4. பொதுத்தீர்வு $y = cx + ac - ac^2$

தனித்தீர்வு $(x + a)^2 = 4ay$

5. பொதுத்தீர்வு $y = cx - \frac{1}{c^2}$

தனித்தீர்வு $4y^3 = 27x^2$

6. $xp^{\frac{a}{a-1}} = c + \frac{3b}{2-3a} p^{\frac{2-3a}{1-a}}$; கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டோடு

7. $y^2 = 2cx + c^3$

8. $x(1-p)^2 = c + \log p - p$; கொடுத்துள்ள சமன்பாட்டோடு

9. $c^2(x^2-a^2) = 2cxy - y^2 + b^2$

10. $y = cx - \frac{ac^2}{1+c}$

11. $y^2 = cx^2 - \frac{h^2c}{1+c}$

12. $y = cx - e^c$

பயிற்சிகள் 16.

1. $4x^2 + 9p = 0$

2. $(x-a)^2 - (y-b)^2 = a^2 - b^2$

3. $y = ke^{ax}$

4. $y^k = cx$; $y^2 = 4x$

5. $x^2 - y^2 = c^2$

6. $y^3 = 3 \log x$

7. $xy = c$

9. $\pm (x + c) = \sqrt{k^2 - y^2} - k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - y^2}}{y}$

$\pm x = \sqrt{k^2 - y^2} - k \log \frac{k + \sqrt{k^2 - y^2}}{y}$

10. $y = c \cosh \left(\frac{x}{c} + A \right)$; $A = 0$

பயிற்சிகள் 17.

1. $y = cx$

2. $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 - y^2}$; $x^2 + y^2 - 2bx = 0$

3. $x^2 + y^2 = 2a^2 \log x + c$

4. $y - x = c (y + x)^3$

5. $xy = A$

6. $2x^2 + 3y^2 = c$

பயிற்சிகள் 18.

1. $r = c \sin \theta$

2. $r = \frac{2c}{1 - \cos \theta}$

3. $r^n = c^n \sin n\theta$

பயிற்சிகள் 19.

1. $v = \frac{g}{n} \tanh nt$, $x = \frac{g}{n^2} \log \cosh nt$ இங்கு $\frac{n^2}{g} = k$

2. $\frac{g}{2n^2} \log \frac{g^2}{g^2 - n^2 V^2}$

3. $-\frac{g}{k^2} + \frac{g}{k^2} e^{-kt} + \frac{g}{k} t$

4. $v = \frac{g \cos \alpha}{k} (1 - e^{-kt})$

பயிற்சிகள் 20.

1. 605
2. 85·15 கிராம்கள்
3. 73500
4. 47·2°C
5. 48°
6. 57°; 22·9 நிமிடங்கள்.

பயிற்சிகள் 21.

2. $i = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

3. $i = \frac{E}{L^2 \omega^2 + R^2} (\omega L \sin \omega t - R \cos \omega t) + A e^{-\frac{Rt}{L}}$

4. $i = \frac{E_0 \omega}{R\left(\omega^2 + \frac{1}{R^2 C^2}\right)} \left(-\omega e^{-\frac{t}{RC}} + \omega \cos \omega t - \frac{1}{RC} \sin \omega t\right)$

6. $i_1 = \frac{E}{R^2 + L^2 \omega^2} \left[L \omega e^{-\frac{Rt}{L}} + R \sin \omega t - L\omega \cos \omega t\right]$

$i_2 = \frac{\omega E C}{1 + \omega^2 R^2 C^2} \left[\cos \omega t + \omega R C \sin \omega t - e^{-\frac{t}{RC}}\right]$

பயிற்சிகள் 22.

1. 37·44 பவுண்டு

2. $100 \log \frac{3}{2}$ நிமிடங்கள்

3. 27 நிமிடம் 28 செகண்டு

4. 3 மணி 50 நிமிடம் 10 செகண்டுகள்

பயிற்சிகள் 23.

6. $(p - c)\, r^2 = A$

பயிற்சிகள் 24.

1. $y = Ae^{-6x} + Be^{4x}$
2. $y = c_1 e^{6x} + c_2 e^{-9x}$
3. $y = A e^{\frac{3}{2}x} + Be^{-4x}$
4. $y = A e^{mx} + Be^{-mx}$
5. $y = A + Be^{x}$
6. $y = Ae^{x} + Be^{2x} + Ce^{3x}$
7. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-4x} + c_3 e^{3x}$
8. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-5x} + c_3 e^{-3x}$
9. $y = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{-bx}$

பயிற்சிகள் 25.

1. $y = e^{x} (c_1 + c_2 x)$
2. $y = e^{ax} (c_1 + c_2 x)$
3. $y = e^{x} (A + Bx + Cx^2)$
4. $y = e^{2x} (c_1 + c_2 x) + c_3 e^{-x}$
5. $y = e^{-x} (A + Bx) + Ce^{x}$
6. $y = e^{x} (A + Bx) + Ce^{-3x}$
7. $q = e^{-\frac{Rt}{2L}} (A + Bt)$

பயிற்சிகள் 26.

1. $y = e^{x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$
2. $y = e^{-4x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$
3. $y = e^{\lambda x} (A \cos \mu x + B \sin \mu x)$
4. $y = 2 (\cos x - \sin x)$
5. $y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$
6. $y = c_1 e^{-3x} + e^{x} (c_2 \cos \sqrt{3}\, x + c_3 \sin \sqrt{3}\, x)$

7. $y = c_1e^{-x} + e^{-3x} (A \cos x + B \sin x)$

8. $y = Ae^x + Be^{-x} + C \cos 2x + D \sin 2x$

9. $y = Ae^{mx} + Be^{-mx} + C \cos mx + D \sin mx$

10. $$y = e^{\frac{mx}{\sqrt{2}}} \left(A \cos \frac{mx}{\sqrt{2}} + B \sin \frac{mx}{\sqrt{2}} \right) + e^{\frac{-mx}{\sqrt{2}}} \left(C \cos \frac{mx}{\sqrt{2}} + D \sin \frac{mx}{\sqrt{2}} \right)$$

11. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x + c_3 \cos 2x + c_4 \sin 2x$

12. $y = A + e^{-2x} (B \cos 3x + C \sin 3x)$

13. $y = Ae^{-2x} + B \cos 2x + C \sin 2x$

பயிற்சிகள் 27.

1. $y = (A + Bx) \cos x + (C + Dx) \sin x$

2. $y = e^{-x} \left[(A + Bx) \cos x + (C + Dx) \sin x \right]$

3. $$y = e^{-\frac{x}{2}} \left[(c_1 + c_2x) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + (c_3 + c_4x) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right]$$

பயிற்சிகள் 28.

1. $y = Ae^{3x} + Be^x + \frac{x^2}{3} + \frac{8x}{9} + \frac{26}{27}$

2. $$y = e^{-\frac{x}{2}} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + x^2 - 2x$$

3. $y = Ae^{-x} + Be^x - 2 - 5x$

4. $y = A \cos 3x + B \sin 3x + \frac{x^2}{9} - \frac{2}{81}$

5. $y = e^{-x}(c_1 \cos\sqrt{2}\,x + c_2 \sin\sqrt{2}\,x) + \frac{1}{3}\left(-\frac{10}{9} + \frac{11x}{3} - 2x^2\right)$

6. $y = A + Be^{-x} + Ce^{-2x} + \frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + \frac{7x}{4}$

7. $y = Ae^{-x} + B\cos x + C\sin x + 2x^3 - 3x^2 - 10x + 9$

8. $y = Ae^{-x} + e^{x}(B + Cx) + x^2 + 2x + 5$

9. $y = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} + c_3 \cos ax + c_4 \sin ax - \frac{1}{a^4}\left(x^4 + \frac{24}{a^4}\right)$

பயிற்சிகள் 29.

1. $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \frac{1}{2}e^{4x}$

2. $y = e^{-x}(A + Bx) + \frac{e^{3x}}{8}$

3. $y = e^{-x}(A\cos x + B\sin x) + \frac{3}{2} + \frac{2e^{x}}{5}$

4. $y = e^{-\frac{1}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{7}}{2}x\right) + \frac{e^{-2x}}{4} + \frac{5}{2}$

5. $y = e^{-px}(A\cos qx + B\sin qx) + \frac{e^{ax}}{a^2 + 2pa + p^2 + q^2}$

6. $y = e^{-2x}(A\cos 2x + B\sin 2x) + \frac{1}{8} + \frac{2}{13}e^{x} + \frac{e^{2x}}{20}$

7. $y = -\frac{3}{2}e^{2x} + e^{x} + \frac{1}{2}e^{3x}$

8. $y = Ae^{x} + Be^{3x} + Ce^{-2x} + \frac{e^{4x}}{18}$

9. $y = e^{2x}(A + Bx) + Ce^{-x} + \frac{e^{3x}}{4}$

10. $y = A + e^{-x}(B + Cx) + \frac{1}{18} e^{2x} + \frac{1}{3} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 4x$

11. $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + e^{\frac{1}{2}x} \left(C \cos x \frac{\sqrt{3}}{2} x + D \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) + ax^2 - 2a + \frac{b}{3} e^{-x}$

12. $y = (c_1 + c_2 x) e^{kx} + \frac{e^x}{(k-1)^2}$

பயிற்சிகள் 30.

1. $y = Ae^{2x} + Be^{-\frac{7x}{8}} + xe^{2x}$

2. $y = c_1 + c_2 x + \frac{x^2 e^x}{2}$

3. $y = e^{mx}(A + Bx) + \frac{x^2 e^{mx}}{2}$

4. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + xe^{-x}$

5. $y = e^{3x}(A + Bx) + \frac{x^2 e^{3x}}{2}$

6. $y = Ae^{-2x} + Be^{-3x} + 3xe^{-2x} + \frac{e^{3x}}{30}$

7. $y = (c_1 + c_2 x) e^{3x} + \frac{1}{9} + \frac{3}{4} e^x + 3e^{2x} + \frac{x^2}{2} e^{3x}$

8. $y = Ae^{-3x} + Be^{-4x} + \frac{1}{5} xe^{-4x} + \frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{50} - \frac{e^{-x}}{24} \right)$

9. $y = e^x (2 - x) + e^{2x}$

10. $y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x) e^{-x} + \frac{xe^x}{8} - \frac{x^2 e^{-x}}{8}$

11. $y = e^{2x}(A + Bx) + ce^{-4x} + \frac{x^2 e^{2x}}{12} + \frac{2e^{-x}}{27} + \frac{xe^{-4x}}{36}$

12. $y = Ae^x + e^{-\frac{x}{2}} \left(B \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + \frac{e^{2x}}{7} + \frac{2}{3} xe^x - 1$

13. $y = e^{2x}(A + Bx) + ce^{3x} + 2xe^{3x} + x^2 + x + 1$

பயிற்சிகள் 31.

1. $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right) - \frac{1}{13}(2 \cos 2x + 3 \sin 2x)$

2. $y = e^{-x}(A + Bx) + \frac{1}{2} \sin x$

3. $y = A \cos 3x + B \sin 3x + \frac{1}{5} \cos 2x + \frac{1}{3}$

4. $y = Ae^{2x} + Be^{-\frac{7x}{3}} + \frac{8}{13} xe^{2x} - \frac{1}{7946}(5 \sin 5x - 89 \cos 5x)$

5. $y = Ae^{-x} + Be^{-2x} - \frac{1}{10}(3 \cos x - \sin x) + \frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \frac{7}{4}$

6. $y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(A \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + B \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x \right) + \frac{1}{4} e^x + \frac{\sin x + \cos x}{2}$

7. $y = Ae^{-2x} + Be^{x} - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{(\sin x - 3 \cos x)}{10}$

8. $y = A \cos 2x + B \sin 2x - \frac{\sin 3x}{5} + \frac{1}{4}\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)$

9. $y = Ae^{-x} + Be^{-2x} - xe^{-2x} + \frac{1}{10}(\sin x - 3 \cos x)$

10. $y = e^{x}(-\cos x + 3 \sin x) + \cos x - 2 \sin x$

11. $y = A + Bx + e^{-\frac{x}{2}}\left(\cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + D \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \frac{5x^4}{12} - \frac{5x^2}{3} - \sin x$

12. $y = (A+Bx) \cos nx + (C+Dx) \sin nx + \frac{\cos mx}{(m^2-n^2)^2}$

13. $y = Ae^{x} + e^{x}(B \cos x + C \sin x) + xe^{x} + \frac{1}{10}(3 \sin x + \cos x)$

14. $y = Ae^{x} + Be^{3x} + \frac{1}{884}(10 \cos 5x - 11 \sin 5x) + \frac{1}{20}(\sin x + 2 \cos x)$

15. $y = e^{-x}(A + Bx) Ce^{x} + \frac{1}{32} e^{3x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{50}(2 \sin 2x + \cos 2x)$

16. $y = Ae^{-x} + e^{\frac{x}{2}}\left(B \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x\right) + \frac{1}{730}(\sin 3x + 27 \cos 3x) + \frac{1}{4}(\sin x - \cos x) - \frac{1}{2}$

17. $y = Ae^{-x} + e^{\frac{x}{2}} \left(B \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + C \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$
$+ \frac{1}{65} (\cos 2x - 8 \sin 2x)$

18. $y = A + e^{2x} (B \cos 3x + C \sin 3x)$
$+ \frac{x}{13} + \frac{1}{290} (9 \sin 2x + 8 \cos 2x)$

பயிற்சிகள் 32.

1. $y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + \frac{x \sin 2x}{4}$

2. $y = A \cos 2x + B \sin 2x + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} x \sin 2x$

3. $y = A \cos 4x + B \sin 4x + \frac{1}{25} e^{-3x} + \frac{1}{8} x \sin 4x$

4. $y = A \cos ax + B \sin ax - \frac{x \cos ax}{2a}$

5. $y = \cos bx + \frac{kx}{2b} \sin bx$

6. $y = c_1 \cos mx + c_2 \sin mx + c_3 \cos nx + c_4 \sin nx$
$+ \frac{x}{4(m^2 - n^2)} \left(\frac{1}{n} \sin nx - \frac{1}{m} \sin mx \right)$

பயிற்சிகள் 33.

1. $y = e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x) + \frac{xe^{2x} \sin 3x}{6}$

2. $y = Ax^{-1} + x^{\frac{1}{2}} \left[B \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log x \right) \right.$
$\left. + C \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log x \right) \right] + \frac{x}{2} + \log x$

3. $y = Ae^{-3x} + Be^{x} + \frac{e^{2x}}{5} \left(x^2 - \frac{12x}{5} + \frac{87}{25} \right)$

4. $y = e^{2x}(A + Bx) + e^{2x}\left(x^2 + \dfrac{x^3}{6}\right)$

5. $y = Ae^{x} + Be^{-x} + \dfrac{e^{x}}{5}(2\sin x - \cos x)$

6. $y = e^{x}(A + Bx - \sin x)$

7. $y = Ae^{-3x} + Be^{x} + \dfrac{e^{2x}}{5}\left(2x - \dfrac{7}{2}\right)$

8. $y = Ae^{2x} + Be^{3x} + \dfrac{e^{x}}{2}\left(x^2 + 3x + \dfrac{7}{2}\right)$

9. $y = Ae^{-6x} + Ae^{2x} + \dfrac{e^{2x}}{64}(4x^2 - 9x)$

10. $y = Ae^{x} + Be^{3x} + \dfrac{e^{-x}}{85}(7\sin x + 6\cos x)$

11. $y = e^{x}(A + Bx) + \dfrac{x^2}{2}e^{x} + e^{2x}(x - 2) - \cos x$

12. $y = e^{3x}(A\cos x + B\sin x) + e^{3x}(x^2 - 2)$
$+ \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{60}(2\sin 2x - \cos 2x)$

13. $y = Ae^{-x} + e^{2x}(B + Cx) + \dfrac{e^{2x}}{18}x^2(x - 1)$

14. $y = Ae^{-x} + e^{x}(B + Cx) + e^{x}\dfrac{x^2}{24}(2x - 3)$

15. $y = e^{x}(A + Bx + Cx^2) + e^{x}\cdot\dfrac{x^3}{24}(x + 4)$

16. $y = e^{x}(A + Bx + Cx^2) + \dfrac{x^5 e^{x}}{60}$

பயிற்சிகள் 34.

1. $y = A\cos 2x + B\sin 2x + \dfrac{x\sin x}{3} - \dfrac{2}{9}\cos x$

2. $x = A + Bx - x^2\sin x - 4x\cos x + 6\sin x$

3. $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - \dfrac{1}{2}x^2\cos x + x\sin x + \dfrac{1}{2}\cos x$

4. $y = (c_1 + c_2 x)e^x + \frac{1}{2}(x\cos x + \cos x - \sin x)$

5. $y = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{3}x + \frac{4}{9}\sin 2x$

6. $y = (c_1 + c_2 x)\cos 2x + (c_3 + c_4 x)\sin 2x$
$- \frac{1}{32}x^2 \sin 2x$

பயிற்சிகள் 35.

1. $y = ax^4 + bx^{-1} + \frac{1}{5}x^4 \log x$

2. $y = A + B\log x + \frac{3}{4}x^2$

3. $y = Ax^3 + Bx^2 + (x^3 - x^2)\log x$

4. $y = x(A + B\log x) + x^3$

5. $y = A + Bx^4 - \frac{x}{3} - \frac{11}{4}\log x$

6. $y = Ax^2 + Bx + \frac{x^3}{2}$

7. $y = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + x$

8. $y = Ax^3 + \frac{B}{x^3} - \frac{1}{x^2}$

9. $y = Ax^2 + \frac{B}{x} + \frac{1}{3}x^2 \log x - \frac{\log x}{3x}$

10. $y = Ax^{n+1} + Bx^n - x^n \log x$

11. $y = Ax^2 + x^{-1}\Big[B\cos(\sqrt{3}\log x)$
$+ C\sin(\sqrt{3}\log x)\Big] + \frac{x^2}{4}\log x$

12. $y = x(A + B\log x) + \frac{C}{x}$

13. $y = Ax^{-1} + Bx^{-2} + Cx^{-3} + \frac{1}{2} x^{-1} \log x$

14. $y + Ax^{-1} + x^{\frac{1}{2}} \left[B \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log x\right) + C \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \log x\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\sin(\log x) + \cos(\log x)\right]$

15. $y = Ax^{-1} + Bx^{-2} + \frac{x}{6}\left(\log x - \frac{5}{6}\right)$

16. $y = Ax^{7} + Bx^{-1} - \frac{1}{16} x^{3} \log x$

17. $y = x(1 - \log x) + \frac{x}{3} (\log x)^3$

18. $y = a + b \log x + 2 (\log x)^3$

19. $y = a + b \log x - x$

20. $y = A + x^2 (B + C \log x) - \frac{1}{9} x^{-1}$

21. $y = A + Bx^4 - \frac{x^3}{3}$

22. $y = \frac{1}{x}(A + B \log x) + \frac{1}{x} \log \frac{x}{1-x}$

23. $\lambda = p^2$ என்றால் தீர்வு $R = A \cos(p \log r) + B \sin(p \log r)$

$\lambda = -p^2$ என்றால் தீர்வு $R = Ar^{p} + Br^{-p}$

$\lambda = 0$ என்றால் தீர்வு $R = A \log r + B$

பயிற்சிகள் 36.

1. $y = (2x - 1)\left[A + C(2x-1)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} + B(2x-1)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right]$

2. $$y = A(5+2x)^{2+\sqrt{2}} + B(5+2x)^{2-\sqrt{2}} - \frac{3x}{2} - \frac{45}{8}$$

3. $$y = (x+2)\left[A + B\log(x+2) + \frac{3}{2}\left\{\log(x+2)\right\}^2\right] - 2$$

4. $$y = c_1 \cos\log(1+x) + c_2 \sin\log(1+x) + 2\log(1+x)\sin\log(1+x)$$

5. $$y = A\cos\left[\frac{k}{b}\log(a+bx)\right] + B\sin\left[\frac{k}{b}\log(a+bx)\right]$$

பயிற்சிகள் 37.

1. $$x = e^{6t}(A\cos t + B\sin t)$$
$$y = e^{6t}\left[(A-B)\cos t + (A+B)\sin t\right]$$

2. $$x = Ae^{-5t} + Be^{t} - \frac{2t}{5} - \frac{13}{25} + \frac{3e^{2t}}{7}$$
$$y = -Ae^{-5t} = Be^{t} - \frac{3t}{5} - \frac{12}{25} + \frac{4}{7}e^{2t}$$

3. $$x = e^{-4t}(A+Bt) + \frac{4e^{t}}{25} - \frac{e^{2t}}{36}$$
$$y = -Be^{-4t} - e^{-4t}(A+Bt) + \frac{e^{t}}{25} + \frac{7e^{2t}}{36}$$

4. $$x = e^{t}(A\cos t + B\sin t) - \frac{\cos 2t}{2}$$
$$y = e^{t}(A\sin t - B\cos t) - \frac{\sin 2t}{2}$$

5. $$y = A\cos t + B\sin t$$
$$x = \frac{A}{5}(\sin t - 3\cos t) - \frac{B}{5}(3\sin t + \cos t)$$

6. $x = Ae^{-3t} + Be^{2t} - \frac{e^{-t}}{6} - \frac{(\cos 2t + 5 \sin 2t)}{26}$

$y = -3Ae^{-3t} - \frac{B}{2}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{-t} + \frac{19}{52}\cos 2t + \frac{17}{52}\sin 2t$

7. $y = e^{-4t}(A \cos t + B \sin t) + \frac{6}{17} - \frac{2e^t}{13}$

$x = -\frac{e^{-4t}}{2}(A \cos t + B \sin t) - \frac{e^{-4t}}{2}(A \sin t - B \cos t) + \frac{31}{26}e^t + \frac{93}{17}$

8. $x = Ae^{-2t} + Be^t$

$y = \frac{e^t}{4} - \frac{3A}{5}e^{-2t} - \frac{3B}{4}e^t$

9. $x = Ae^{5t} + Be^t + \frac{6 \sin t - 17 \cos t}{65}$

$y = \frac{A}{2}e^{5t} - \frac{3B}{2}e^t + \frac{9 \cos t - 7 \sin t}{130}$

10. $y = e^t(A + Bt) + e^{-t}(C + Dt)$

$x = -\{e^t(2A + 2B + 2Bt) + e^{-t}(2C - 2D + 2Dt)\}$

11. $x = e^{\frac{mt}{\sqrt{2}}}\left(c_1 \cos \frac{mt}{\sqrt{2}} + c_2 \sin \frac{mt}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{mt}{\sqrt{2}}}\left(c_3 \cos \frac{mt}{\sqrt{2}} + c_4 \sin \frac{mt}{\sqrt{2}}\right)$

$y = e^{\frac{mt}{\sqrt{2}}}\left(c_1 \sin \frac{mt}{\sqrt{2}} - c_2 \cos \frac{mt}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{mt}{\sqrt{2}}}\left(c_4 \cos \frac{mt}{\sqrt{2}} - c_3 \sin \frac{mt}{\sqrt{2}}\right)$

12. $x = Ae^{t} + Be^{-t} + C\cos t + D\sin t - \frac{t\cos t}{4} + \frac{t\sin t}{4}$

$y = -Ae^{t} - Be^{-t} + C\cos t + D\sin t + \frac{\sin t - \cos t}{2} + \frac{t(\sin t - \cos t)}{4}$

13. $y = A + Be^{3t} + Ce^{-2t} - \frac{1}{6}e^{t} + \frac{t^{3}}{3} + \frac{t}{3}$

$x = -Be^{3t} - Ce^{-2t} + \frac{e^{t}}{6} - \frac{t}{3} + \frac{1}{18}$

பயிற்சிகள் 38.

1. $x = \frac{1}{5}\left(\cos 2t + \sin 2t + e^{t} - 2e^{-t}\right)$

$y = \frac{1}{5}\left(\sin 2t - \cos 2t + 2e^{t} - e^{-t}\right)$

2. $x = -e^{t};\ y = 3e^{t}$

3. $x = e^{-t};\ y = \sin t + 1 + e^{-t}$

4. $x = \cos pt + \frac{1}{p}\sin pt$

$y = -\sin pt$

பயிற்சிகள் 39.

3. (i) $Ae^{-\alpha t}\cosh(\beta t + \epsilon) + \frac{E}{R}\cos\phi\sin(pt + \phi)$

(ii) $Ae^{-\alpha t}\cos(\beta t + \epsilon) + \frac{E}{R}\cos\phi\sin(pt + \phi)$

இங்கு $\alpha = -\frac{R}{2L}$; $\beta = \pm\left[\left(\frac{R}{2L}\right)^{2} - \frac{1}{CL}\right]^{\frac{1}{2}}$

$\tan\phi = \frac{1 - LCp^{2}}{RCp}$

4. $R^{2} < 4\frac{L}{C}$

5. $x = \frac{EC}{\sqrt{(1-p^2 CL)^2 + R^2C^2p^2}} \cos(pt - \alpha)$

இங்கு $\tan \alpha = \frac{RCp}{1 - p^2 CL}$

6. $L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = E\omega \cos \omega t$

$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

பயிற்சிகள் 40.

1. $\frac{wa^4}{24EI}$

2. $EIy = \frac{W}{6}(l-x)^3 + \frac{w}{24}(l-x)^4 + \frac{Wl^2 x}{2} + \frac{wl^3 x}{6} - \frac{Wl^3}{6} - \frac{wl^4}{24}$

3. $\frac{l^3}{384EI}(5wl + 8W)$

4. $\frac{Wl^3}{3EI}$

6. $EIy = \frac{wx^2}{48}(3l^2 - 5lx + 2x^2)$

7. $EIy = \frac{wl^2 x^2}{48} - \frac{wx^4}{24} - \frac{wl^4}{384}$; $K = \frac{wl^2}{12}$

பயிற்சிகள் 41.

9. $y = -\frac{w}{Pn^2}\cos nx - \frac{w}{2P}\left(x^2 - \frac{2}{n^2}\right)$

இங்கு $n^2 = \frac{P}{EI}$

பயிற்சிகள் 42.

1. $\omega = \frac{n^2\pi^2}{l^2}\sqrt{\frac{gEI}{\rho}}$ (n ஒரு + முழு எண்)

கலைச்சொற்கள்

(தமிழ் — ஆங்கிலம்)

அ

அச்சு — axis
அச்சு அமுக்கம் — axial thrust
அடுக்குக்குறி மதிப்பு — exponential value
அடுக்குக்குறி விதி — index law
அத்தியாயம் — chapter
அதிபரவளைவு — hyperbola
அமுக்கம் — thrust
அரைமுப்படிப் பரவளைவு — semicubical parabola

ஆ

ஆதி — origin
ஆயத்தொலை — coordinate
ஆரைக்கோடு — radius

இ

இடப்புறம் — left side
இடைவெளி — interval
இணை உத்திரம் — tierod
இணைக் கற்பனை எண் — conjugate imaginary number
இயக்க விதி — law of motion
இயற்கணிதக் குறி — algebraical symbol
இயற்கணித சமன்பாடு — algebraical equation

இறுகும் அழுக்கம் — compressive stress
இறுக்கம் — compression
இறுகும் விசை — compressive force
இழுவிசை — tension

ஈ

ஈருறுப்புத் தேற்றம் — binomial theorem

உ

உத்திரம் — beam
உத்திரத்தின் மீட்சிக் குணகம் — modulus of elasticity of the beam
உத்திரங்களின் வளைதல் — bending of beams
உராய் தலைபாகம் — bearing
உருளை வலிமைக் கொள்கை — theory of strength of cylinders
உள்ளமுக்கம் — stress

எ

எடை — weight
எடை அடர்த்தி — weight per unit length
எண்ணளவு — magnitude
எந்திரத் தண்டு — shaft
எல்லை நியதி — boundary condition
எளிய மின் சுற்று — simple electric circuit

ஏ

ஏதேனுமொரு — arbitrary

ஒ

ஒத்திசைவு — resonance
ஒருபடித்தான — homogeneous
ஒரு போகுக் கோடுகள் — parallel lines
ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகள் — simultaneous equations

ஓ

ஓய்வு — rest

க

கட்டக்கோணம் — phase angle

கயிற்று வளை — catenary

கற்பனை எண் — imaginary number

காற்றின் அழுத்தம் — atmospheric pressure

காற்றின் தடை — air resistance

கிடைமட்டம் — horizontal

குத்தாயம் — ordinate

குணகம் — coefficient

குறியியல் கூடுதல் — algebraic sum

குறுக்குத் தாங்கி — strut

குவியம் — focus

குவிய மாறிலி — latus rectum

கூடிய வகையீடு — total differential

கோணத் திசைவேகம் — angular velocity

கோவை — expression

ச

சம அழுத்தமுள்ள — equipotential

சமபடித்தான — homogeneous

சர்வ சமம் — identity

சரிவு — gradient, slope

சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடு — ordinary differential equation

சாமானிய இசையியக்கம் — simple harmonic motion

சார்பில் மாறி — independent variable

சார்பு — function

சார்புடைய மாறி — dependent variable

சிறப்புத் தீர்வு — particular solution, particular integral

சூத்திரம் — formula

செய்முறை — working rule
செவ்வக அதிபரவளைவு — rectangular hyperbola
செங்குத்து நீச்சுப்பாதை — orthogonal trajectory
செங்கோடு — normal
சுற்றுகிற வேகம் — whirling speed
சுழலிணை — couple
சுழலிணைத் திருப்புதிறன் — moment of the couple

த

தடைப் பட்ட இசையியக்கம் — resisted simple harmonic motion
தனித்தீர்வு — singular solution
தலைகீழ் — reciprocal
தலைகீழ் செயலி — inverse operator
திசைவேகம் — velocity
தீர்வு — solution
துணை அலகு — parameter
துணைச் சமன்பாடு — auxiliary equation
துணைத் தீர்வு — complementary function
தூண் — column
தொகை — integral
தொகைச் சார்பு — integrand
தொகையிடு — integrate
தொகையீட்டுக் காரணி — integrating factor
தொடக்கப்பகுதி — introduction
தொடர் சுற்று — series circuit
தொடர் செயலி — group operator
தொடர்பற்ற — independent
தொடர்பு — relation
தொடுவரை, தொடுகோடு — tangent
தொலைத் தொடுகோடு — asymptote

ந

நடுநிலைப் பரப்பு — neutral surface
நிபந்தனை — condition

நியம வடிவம்	—	standard form
நிரூபணம்	—	proof
நிறை	—	mass
நிறையான வகையீடு	—	perfect differential
நிலைமத் திருப்புதிறன்	—	moment of inertia
நிலைப்புத்தன்மை	—	stability
நீட்சி அமுக்கம்	—	tensile stress
நீள்வட்டம்	—	ellipse
நெஞ்சு வளை	—	cardioid
நேர்மாற்றம்	—	varies directly
நேரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	—	linear differential equation

ப

பகுதிப் பின்னங்கள்	—	partial fractions
பகுதி வகையீடு	—	partial differential
பகுதி வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	—	partial differential equation
படி	—	degree
பயன்முறை வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	—	applied defferential equation
பரவளைவு	—	parabola
பரவு விதி	—	distributive law
பல்லுறுப்புக் கோவை	—	polynomial expression
பாய் வேகம்	—	rate of flow
பிரதியிடு	—	substitute
பிரதியீடு	—	substitution
புவி ஈர்ப்பு விசை	—	force of gravity
பூச்சியம்	—	zero
பொது அச்சுள்ள	—	coaxal
பொதுக்குவிய கூம்பு வளைவு	—	confocal conic
பொதுத் தீர்வு	—	general solution
பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடு	—	exact differential equation
பொருத்தமான வகையீடு	—	exact differntial

ம

மடக்கை — logarithm
மறுதலையாக — conversely
மாற்று விதி — commutative law
மாறி — variable
மாறிலி — constant
மாறுநிலை வேகம் — critical speed
மிகப் பொதுத் தீர்வு — most general solution
மின்தடை — electrical resistance
மின் தேக்கம் — capacitance
மின் தேக்கி — condenser
மின் தூண்டம் — inductance
மின் பக்க இணைப்புச் சுற்று — parallel circuit
மின்னழுத்தம் — voltage
மின்னூட்டம் — electric charge
மின்னோட்டம் — electric current
மீச்சிறு மதிப்பு — minimum value
மீப்பெரு மதிப்பு — maximum value
மீட்சி விசை — restoring force
மீள் இயல்புடைய வளைவு — deflection curve, elastic curve
முடிவிலி — infinity
முடுக்கம் — acceleration
முரணான — inconsistent
முற்றுச் சுற்று — closed circuit
மூலம் — root
மூலக்கூறு — molecule
மெய்யெண் — real number
மையம் — centre
மைய விலகு விசை — centrifugal force

வ

வகைக்கெழு — differential coefficient
வகைக்கெழுச் சமன்பாடு — differential equation
வகையீடு — differential

வகையீட்டுச் செயலி	—	differential operator
வகைநுண் கணிதம்	—	differential calculus
வடிவ கணிதம்	—	geometry
வரிசை	—	order
வரையறை	—	definition
வளைசட்டம்	—	cantilever
வளையாரம்	—	radius of curvature
வளைவரை	—	curve
வளைவு	—	curvature
வளைவு திருப்பு திறன்	—	bending moment
வளைவு விறைப்பு	—	flexural rigidity
விகித முழுச் சார்பு	—	rational integral function
விதி	—	law
விசை	—	force
விசையாட் சுழலி	—	flywheel
விலக்கு வகை	—	exceptional case
விளைவு	—	resultant
வீச்சு	—	amplitude
வெட்டு விசை	—	shearing force
வெப்பம் மாற்றீடற்ற விதி	—	adiabatic law
வேதிப் பொறியியல்	—	chemical engineering